PRACE
INSTYTUTU AERODYNAMICZNEGO
W WARSZAWIE

Prowadzone pod kierunkiem prof. C. Witoszyńskiego.

Zeszyt VI.

TRAVAUX
DE L'INSTITUT AÉRODYNAMIQUE
DE VARSOVIE

Exécutés sous la direction du prof. C. Witoszyński.

Fascicule VI.

WARSZAWA — 1932.

PRACE
INSTYTUTU AERODYNAMICZNEGO
W WARSZAWIE

Prowadzone pod kierunkiem prof. C. Witoszyńskiego.

Zeszyt VI.

TRAVAUX
DE L'INSTITUT AÉRODYNAMIQUE
DE VARSOVIE

Exécutés sous la direction du prof. C. Witoszyński.

Fascicule VI.


Biblioteka Jagiellońska
1003239359

5

WARSZAWA — 1932.

102972
III

TREŚĆ:

SOMMAIRE:



ERRATA.

Page 40, ligne 20 *au lieu de* l'extérieur des arcs curvilignes *lire* l'arc curviligne.

„ 40, „ 21, „ „ „ situés *lire* situé.

„ 41, formule (2), „ „ „ $\zeta = \arccos \frac{z}{c}$ *lire* $\zeta = \arccos \left(-\frac{z}{c}\right)$.

„ 47, formule (21), „ „ „ $k = 8a \frac{1 - k'^2 \sin^2 \chi}{k'^2 \sin^2 2\chi}$ *lire* $h = 8a \frac{1 - k'^2 \sin^2 \chi}{k'^2 \sin^2 2\chi}$.

„ 66, ligne 8, „ „ „ tenir lieu *lire* tenir compte.

„ 77, „ 2, „ „ „ parabolique *lire* elliptique.

„ 79, „ 3, „ „ „ en *lire* on.

Sur la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un arc symétrique de conique.

JULJAN BONDER, DR., ING.

Le problème étudié dans ce travail constitue un cas spécial du problème général de la transformation conforme de l'extérieur d'un segment de droite (ou d'un cercle) en l'extérieur d'un profil sans épaisseur, formé par un ou plusieurs arcs analytiques. Jusqu'à présent on connaît, dans cette matière, la représentation conforme de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un arc de cercle (profils bien connus de Joukowski), ou encore — sur l'extérieur d'une ligne qui se compose de deux arcs de cercle n'ayant qu'un point commun [1]).

La solution qui est donnée ici peut trouver des applications à la théorie des profils d'ailes sustentatrices. Mais je crois que le problème traité présente quelque intérêt également hors des applications aérodynamiques, savoir dans la théorie de la représentation conforme même.

Il est à remarquer que les trois premiers chapitres, concernant le cas de parabole, font le résumé, assez détaillé, de la thèse de doctorat de l'auteur [2]), tandis que les deux derniers chapitres renferment les résultats nouveaux, encore inédits.

Voici le court sommaire.

Dans le chapitre I, on trouve la fonction de transformation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un cercle en l'extérieur d'un arc quelconque de parabole. Cette fonction s'exprime à l'aide d'une intégrale se réduisant à des intégrales elliptiques de première et deuxième espèce. Nous avons résolu ce problème d'abord pour l'arc symétrique de parabole, en généralisant ensuite la solution pour un arc quelconque. Le chapitre II est consacré à l'étude détaillée de cette représentation conforme, et en particulier à l'examen des cas de dégénérescence; on y trouve ensuite l'analyse des formes géométriques des „squelettes“ obtenus, illustrée des nombreux exemples. Nous y traitons de plus en détail le problème de calcul numérique, en indiquant le procédé le plus pratique, et en donnant les formules qui permettent d'appliquer les Tables de Legendre au calcul des intégrales elliptiques de deux premières espèces, prises entre des limites imaginaires. Enfin, dans le chapitre III, nous montrons comment on peut passer des squelettes paraboliques aux profils qui en dérivent, et nous y examinons de plus cette famille des profils au point de vue de la variation du couple des forces aérodynamiques agissant sur le profil en question, placé dans sa *position zéro* (c'est-à-dire, à l'angle de portance nulle).

Dans le chapitre IV nous avons déterminé, par une méthode analogue à celle appliquée au cas de l'arc de parabole, la représentation conforme et biunivoque de l'exté-

---

[1]) Voir pour cela: A. Sonnefeld. *Ueber Flüssigkeitsströmungen um zusammengesetzte zylindrische Schalen und die daraus folgenden Auftriebskräfte*, Inaugural-Dissertation, Iena, 1910.

[2]) Cette thèse a été présentée à la Faculté de Mécanique de l'École Polytéchnique de Varsovie, et imprimée en polonais sous le titre: „*O pewnem zagadnieniu z dziedziny odwzorowania podobnego*” (édition de l'Académie des Sciences Techniques, Warszawa 1931). En la citant, dans la suite, nous la désignerons tout court: *Th.*

rieur d'un segment de droite sur l'extérieur d'un arc symétrique d'hyperbole. La fonction analytique déterminant cette représentation s'exprime par des intégrales elliptiques de toutes les trois espèces. En raison de cela, nous y avons introduit les fonctions *Thêta* de Jacobi, les plus avantageuses au point de vue de la facilité de l'étude approfondie de cette représentation, et des applications numériques. La discussion des cas de dégénérescence termine ce chapitre.

Enfin, le dernier chapitre V est consacré au même problème concernant un arc symétrique d'ellipse. Ici les résultats sont classés en deux groupes: le premier correspond à un arc symétrique par rapport au grand axe de l'ellipse *(arc périfocal)*, et le deuxième — à un arc symétrique par rapport au petit axe *(arc péricentral)*.

CHAPITRE I.

Représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un arc quelconque de parabole.

1. Préliminaires. Coordonnées paraboliques.

Envisageons un arc de parabole, situé dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, et un cercle, dit *générateur* — dans le plan de la variable complexe $Z = X + iY$.

Le problème, que nous nous proposons de résoudre dans ce chapitre, consiste à trouver la forme générale de la fonction analytique

$$z = f(Z) \tag{1}$$

qui détermine la représentation conforme et biunivoque de la région du plan des Z, extérieure au cercle générateur Q, sur tout le plan des z, muni d'une fente ayant la forme de l'arc de parabole. Cette fonction doit être donc holomorphe à l'extérieur de ce cercle Q, sauf le point à l'infini: $Z = \infty$. Nous supposons de plus — ce que l'on fait toujours dans l'aérodynamique—qu'au point à l'infini cette transformation se réduit à une simple identité. Par suite, la fonction (1) est développable dans le voisinage de ce point en série de Laurent ne renfermant qu'une seule puissance positive de Z, savoir Z même:

$$z = Z + C_0' + iC_0'' + \frac{C_1' + iC_1''}{Z} + \frac{C_2' + iC_2''}{Z^2} + \cdots \tag{2}$$

Il en résulte que

$$\lim_{\substack{Z=\infty \\ z=\infty}} \frac{z}{Z} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{Z=\infty \\ z=\infty}} \frac{dz}{dZ} = 1. \tag{2*}$$

Nous pouvons supposer — sans restreindre la généralité de nos recherches — que le centre du cercle générateur Q se trouve à l'origine de coordonnées; désignons en outre son rayon par a. On peut écrire alors l'équation de la circonférence du cercle générateur sous la forme

$$|Z| = a. \qquad)3)$$

Quant à l'arc de parabole, il s'agit ici de sa forme géométrique pure et pas du tout de la position qu'il peut occuper par rapport à un système de coordonnées. Bien plus, toutes les paraboles étant semblables, il suffit d'envisager une famille des paraboles à un paramètre, par exemple, les paraboles coaxiales et confocales.

Envisageons donc une telle famille des paraboles. Soit l'axe des x leur axe commun et l'origine de coordonnées F — leur foyer commun. L'équation de cette famille sera:

$$y^2 = 2\,p\,x + p^2, \tag{4}$$

où p, dit le *paramètre de la parabole*, détermine la distance du foyer F à la directrice d de la parabole.

Sur une de ces paraboles, considérons un arc quelconque $A\,B$ (fig. 1).

Comme on sait, la théorie de la représentation conforme ne donne, en général, aucune méthode permettant de trouver — dans un cas déterminé — la fonction de transformation sous la forme d'une expression analytique. C'est pourquoi, en présentant ici la solution du problème posé, je ne me borne pas seulement à donner le résultat écrit sous la forme définitive; au contraire, je profit de l'occasion pour indiquer la méthode qui conduit à ce résultat, méthode qui, d'ailleurs — après des modifications convenables — peut être appliquée à un nombre de cas.

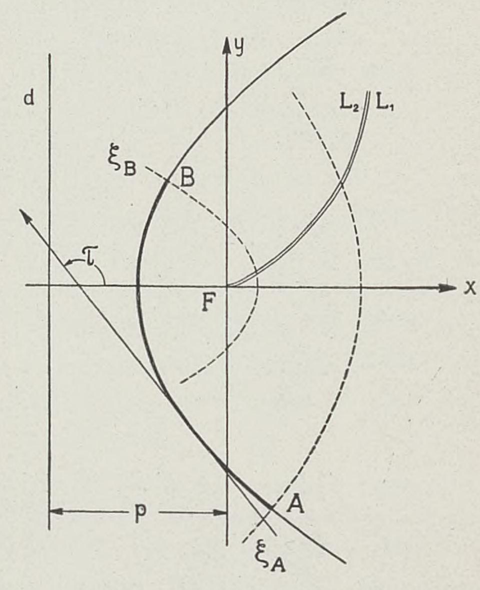


Fig. 1.

La méthode en question exige que l'on se serve des plusieurs représentations successives. Tout d'abord, en tirant parti des propriétés bien connues des coordonnées curvilignes paraboliques, nous allons tranformer l'arc de parabole en un segment rectiligne.

Introduisons à cet effet un nouveau plan: le plan de la variable complexe $\zeta = \xi + i\,\eta$. Convenons en outre—une fois pour toutes—de marquer par les mêmes caractères tous les éléments correspondants (malentendu est ici évidemment exclu, les points correspondants se trouvant dans les différents plans).

Considérons ensuite la représentation conforme définie par la formule:

$$z = \frac{p}{2}\,\zeta^2. \tag{5}$$

On voit immédiatement que cette fonction fait correspondre à chaque demi-plan des ζ, situé d'un côté d'une droite passant par le point F $(\zeta = 0)$, tout le plan des z, coupé cependant le long d'un rayon vecteur issu de l'origine F. De cette manière, la représentation conforme de tout le plan des ζ couvre deux fois le plan des z, en formant une *surface de Riemann à deux feuillets*. Sur cette surface relative à $\sqrt{z}$, la variable ζ est déjà la fonction uniforme de la position du point z.

Ajoutons ici encore une remarque bien évidente, mais d'une grande importance pour ce qui suit: pour obtenir une représentation sur tout le plan des z, il n'est point nécessaire que le demi-plan des ζ soit limité par une droite — celle-ci peut être remplacée par une courbe quelconque $L_1\,F\,L_2$ pourvu qu'elle passe par l'origine F et soit, de plus, symétrique par rapport à ce point (fig. 2). La courbe $L_1\,F\,L_2$, après avoir effectué la transformation (5), forme deux branches identiques (fig. 1); elles coïncident d'ailleurs, en con-

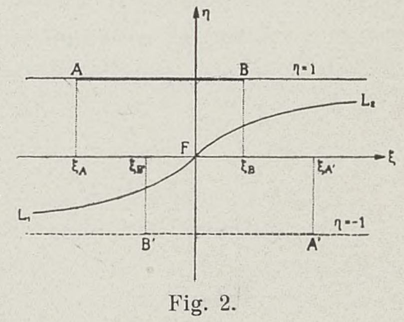


Fig. 2.

stituant une seule courbe, servant du passage d'un feuillet de la surface de Riemann à l'autre. Nous ne précisons plus la forme de cette courbe, cela étant inutile, comme nous allons montrer un peu plus loin. Ce que nous voulons en supposer actuellement — pour clarté des considérations suivantes — c'est que cette courbe ne coupe nulle part l'arc parabolique AB.

Étudions maintenant de plus près la représentation en question.

D'abord, séparons dans la formule (5) la partie réelle et la partie imaginaire:

$$x = \frac{p}{2}(\xi^2 - \eta^2); \qquad y = p\,\xi\,\eta. \tag{6}$$

On en voit qu'aux hyperboles équilatères $\xi^2 - \eta^2 = \text{Const.}$ correspondent, dans le plan des z, les droites parallèles à l'axe des y, et à celles $\xi\eta = \text{Const.}$, orthogonales aux précédentes, correspondent les droites parallèles à l'axe des x.

Au contraire, aux droites $\xi = \text{Const.}$ correspondent les paraboles: $y^2 = -2p\,\xi^2 x + p^2\xi^4$, et aux droites $\eta = \text{Const.}$ — les paraboles: $y^2 = 2p\,\eta^2 x + p^2\eta^4$. Nous voyons donc que, à toutes les paraboles (4) envisagées par nous dans le plan des z, on peut faire correspondre, dans le plan des ζ, uniquement les droites $\eta = \pm 1$ — c'est seulement le paramètre p, intervenant dans la fonction de transformation (5), qui change alors, lorsqu'on passe d'une parabole à l'autre. Ainsi, on obtient, sous une forme très simple, les formules déterminant les coordonnées paraboliques ξ et η des points, situés sur les paraboles considérées:

$$\eta = \pm 1, \qquad \xi = \pm \frac{y}{p}, \tag{7}$$

où au signe $+$ (resp. $-$) d'une fonction correspond le signe $+$ (resp. $-$) de l'autre; cela résulte immédiatement de la formule (6).

On voit donc que sur la droite $\eta = +1$ se trouve le segment AB correspondant, dans le plan des z, à l'arc AB de parabole. De même, sur la droite $\eta = -1$, se trouve le segment $A'B'$, symétrique de AB par rapport à l'origine F: $\xi_{A'} = -\xi_A$ et $\xi_{B'} = -\xi_B$ (le segment $A'B'$ est donc orienté dans un sens opposé à celui du segment AB — voir fig. 2). Or, au segment $A'B'$ correspond, dans le plan des z, le même arc de parabole, situé pourtant sur l'autre feuillet de la surface de Riemann, relative au radical $\sqrt{z}$.

Nous allons considérer pour essentiel seulement un des deux demi-plans des ζ — savoir celui qui contient le segment AB — l'autre demi-plan ne jouera qu'un rôle auxiliaire.

Ainsi, les coordonnées paraboliques de notre arc AB s'expriment déjà sans aucune ambiguïté:

$$\eta = +1; \qquad \xi = \frac{y}{p}. \tag{7*}$$

Il en résulte aussi une très simple signification géometrique de la coordonnée parabolique ξ. En effet, en désignant par τ l'angle que fait la tangente en un point quelconque de cet arc AB avec l'axe des x, on obtient de l'équation de la parabole (4):

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

d'où, en tenant compte de (7*):

$$\xi = \operatorname{ctg}\tau. \tag{8}$$

Les valeurs de la coordonnée parabolique ξ, relatives aux extrémités du segment AB, ξ_A et ξ_B, suffiront évidemment pour la détermination complète de la position de l'arc AB sur la parabole envisagée (fig. 1). C'est pour cela que, dans la suite, ces paramètres, ξ_A et ξ_B, nous serviront comme des paramètres primitifs.

2. Cas d'un arc symétrique de parabole.

Simplifions, pour le moment, le problème en supposant que le segment de droite AB (ainsi que $A'B'$) soit symétrique par rapport à l'axe imaginaire $F\eta$. Pour ne pas confondre ce cas avec le cas général (fig. 2), nous traçons ces segments dans un nouveau plan des $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ (fig. 3) et désignons leurs extrémités respectivement par C, D et C', D'. Or, en se laissant guider par le principe connu de Schwarz[1]), on peut établir très aisément la représentation conforme du demi-plan des ζ_1, situé d'un côté (p. ex. du côté droit) de l'axe imaginaire et muni de deux fentes, formées par les demi-segments (M, N) D et (M', N') C', sur le demi-plan d'une nouvelle variable complexe $t = r + is$, débarrassé déjà des coupures. Cela veut dire que l'on peut transformer le demi-plan limité par le contour brisé $\infty N'C'M'FMDN\infty$ en un demi-plan limité par une simple droite $\infty N'C'M'FMDN\infty$ (voir les fig. 3 et 4). Or, à cause de symétrie des segments CD et $C'D'$ par rapport à l'axe imaginaire des η_1, il est évident que, par cela même, le deuxième demi-plan des ζ_1 se transformera en deuxième demi-plan des t, et cela de la manière que les points symétriques par rapport à l'axe η_1 auront, dans le plan des t, pour homologues les points symétriques par rapport à l'axe imaginaire s. Mais alors, dans tout le plan des t, les fentes apparaissent de nouveau, cependant bien changées et dans une autre position. En définitive, on obtiendra la représentation du plan des ζ_1, muni de deux fentes rectilignes, CD et $C'D'$, sur tout le plan des t, muni aussi de deux fentes rectilignes, MN et $M'N'$, situés sur l'axe imaginaire symétriquement par rapport à l'origine de coordonnées F.

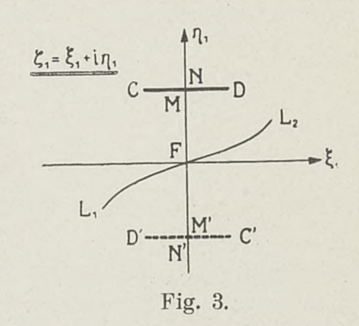


Fig. 3.

Les détails s'expliquent par la comparaison des figures 3 et 4. Cette comparaison suggère de plus l'idée que la dérivée $\frac{d\zeta_1}{dt}$ de la fonction cherchée doit posséder deux zéros simples aux points réunis, (C, D) et (C', D'), et quatre pôles algébriques d'ordre $1/2$ aux points M, N, M' et N'. Par conséquent, la fonction même de transformation s'exprimera par l'intégrale elliptique:

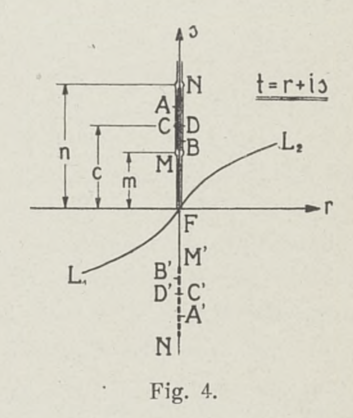


Fig. 4.

$$\zeta_1 = C_1 \int_o^t \frac{(t^2 + c^2)\,dt}{\sqrt{(t^2 + m^2)(t^2 + n^2)}}, \tag{9}$$

où C_1 est le coefficient réel, provisoirement indéterminé, et c, m, n — les paramètres réels et positifs qui définissent — conformément à la fig. 4 — la position des points (C, D), M et N; ces paramètres sont assujettis évidemment à satisfaire à l'inégalité:

$$m < c < n. \tag{10}$$

Quant à la détermination du radical $\sqrt{(t^2 + m^2)(t^2 + n^2)}$, nous choisissons, une fois pour toutes, celle qui est positive au point $F(t = 0)$ (il est bien entendu qu'ensuite, le long du chemin d'intégration, cette détermination devra résulter par continuation de la valeur initiale). Remarquons encore que l'intégration dans la form. (9) est admissible le long de chaque contour qui ne rompt ni la coupure MN, ni celle $M'N'$.

---

[1]) H. A. Schwarz. *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, Gesammelte Mathematische Abhandlungen Bd. II. Springer, Berlin 1890, p. 68.

Nous allons montrer maintenant que la fonction (9) — en y ajoutant quelques conditions supplémentaires concernant les paramètres C_1, m, c et n — donne en effet la représentation cherchée. Observons d'abord que la limite inférieure de l'intégrale (9) étant égale à zéro, l'origine de coordonnées dans le plan des ζ_1 ($\zeta_1 = 0$) correspond à celui $t = 0$. Envisageons ensuite, dans le plan des t, le chemin rectiligne conduisant de l'origine F au point M (fig. 4). On y a: $t = is \leqslant im$ — et, par suite, l'intégrale (9), prise le long de ce chemin, eu égard à la détermination admise du radical, devient:

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = i\, C_1 \int_0^s \frac{(c^2 - s^2)\, ds}{\sqrt{(m^2 - s^2)\,(n^2 - s^2)}}. \tag{11}$$

On en voit qu'aux points, situés dans le plan des t sur le segment FM de l'axe imaginaire, correspondent dans le plan des ζ_1 les points, situés aussi sur l'axe imaginaire et dans la même succession (fig. 3). Si nous voulons maintenant que le point M, appartenant à la droite AB, se trouve, dans le plan des ζ_1, sur la droite $\eta_1 = 1$, il faut que $\underset{t=im}{\zeta_1} = i$. Il résulte alors de la form (11) que cette condition s'exprime par l'équation:

$$n\, C_1 \left[\left(\frac{c^2}{n^2} - 1\right) K' + E'\right] = 1\,, \tag{12}$$

où $K' = K(k')$ et $E' = E(k')$ désignent les intégrales elliptiques complètes de Legendre, de première et deuxième espèce,

$$\left.\begin{aligned} K(k) &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\ E(k) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

relatives cependant au module complémentaire k':

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{m}{n}, \qquad \left(\text{d'où: } k = \frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n}\right). \tag{14}$$

Si l'on veut ensuite continuer l'intégration (9) le long de l'axe imaginaire s, du point M à N, on doit éviter le point critique M ($t = im$). On peut faire cela en décrivant d'un ou d'autre côté de ce point une petite demi-circonférence, ayant son centre au point M et joignant le contour rectiligne d'intégration FM avec celui MDN ou MCN (fig. 4). Dans chaque cas, nous nous trouverons — après la représentation — dans différents demi-plans ζ_1, séparés par l'axe imaginaire η_1. En effet, en entourant le point M du côté droit, le module de $t - im$ ne change pas, tandis que son argument augmente de π et par suite l'argument du radical $\sqrt{t - im}$ obtient l'accroissement $^1/_2\,\pi$. Or le point $t = im$ n'étant pas critique pour les autres facteurs du radical général $\sqrt{(t^2 + m^2)\,(t^2 + n^2)}$, ce radical est donc multiplié par $+i$, lorsque la variable t entoure le point M du côté droit; au contraire, ce radical est multiplié par $-i$, lorsque t l'entoure du côté gauche. Autrement dit, dans le premier cas, le radical, réel et positif au début, devient purement imaginaire positif; dans

le second cas — purement imaginaire négatif. C'est seulement de cette chose dont il faut tenir compte, lorsqu'on passe le long du contour d'intégration FN tout près du point critique M, car évidemment le module de l'intégrale (9), prise le long de la demi-circonférence en question, tend vers zéro en même temps que le rayon de celle-ci.

Il en résulte que les valeurs de la foncion $\zeta_1(t)$ le long des deux bords de la coupure MN sont déterminées par la formule:

$$\zeta_1 = i \pm C_1 \int_m^s \frac{(c^2 - s^2)\, ds}{\sqrt{(s^2 - m^2)(n^2 - s^2)}}, \quad (m \leqslant s \leqslant n), \tag{15}$$

où il faut prendre le signe (+), si l'on suit le bord droit de la coupure MN, et — le signe (—), si l'on suit le bord gauche.

Ainsi le segment FMN se transforme en deux lignes brisées formant deux angles droits: FMD et FMC (fig. 3). On voit aussi que dans le plan des ζ_1 les points, correspondant à ceux qui dans le plan des t coïncident sur le segment MN, sont symétriques par rapport à l'axe η_1. Remarquons ensuite que lorsqu'on parcourt le segment MDN, le point correspondant ζ_1 s'avance d'abord à droite jusqu'au moment où l'on parvient au point $D\,(s = c)$ — alors la derivée $\frac{d\,\zeta_1}{d\,t}$ s'y annulant, le point ζ_1 s'arrête pour reculer ensuite, cette dérivée devenant négative pour $s > c$. Par suite, en continuant suivre le segment DN, on fait décrire au point correspondant ζ_1 la même droite, mais du côté supérieur et dans le sens opposé, c'est-à-dire à gauche.

La représentation du côté gauche MCN du segment MN se forme de la même façon, il faut seulement remplacer partout le mot *droit* par *gauche* et *vice versa* (fig. 3 et 4).

Ainsi, on peut arriver, dans le plan des t, au point N en suivant les deux côtés différents de la fente MN. Mais alors, la fonction $\zeta_1(t)$ n'obtient pas en général au point N la même valeur; pour que cela ait lieu, il faut que l'intégrale (9), prise le long de chaque contour fermé entourant la coupure MN, soit égale à zéro. Cette condition est en même temps nécessaire et suffisante pour que notre représentation conforme soit biunivoque [1]). Remarquons encore que — à cause de la symétrie complète rattachée à la représentation envisagée—on ne pourrait satisfaire à la condition d'uniformité sans que le point N du plan des ζ_1 ne se trouve alors sur l'axe imaginaire η_1 — autrement dit: il doit être de nouveau $\zeta_1 = i$, lorsque $t = i\,n$. Il en résulte donc que la *condition d'uniformité* s'exprime par l'égalité:

$$\zeta_{1\,t=in} - \zeta_{1\,t=im} = 0. \tag{16}$$

En appliquant alors à la formule (15) le changement de variable: $n^2 - s^2 = (n^2 - m^2)\, u^2$, on obtient cette condition sous la forme:

$$\frac{c^2}{n^2} K - E = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad c^2 = n^2 \frac{E}{K} \cdot \tag{16*}$$

Remarquons encore que l'on a (voir form. 13):

$$k'^2 K \leqslant E \leqslant K, \qquad \text{d'où:} \qquad k'^2 n^2 \leqslant c^2 \leqslant n^2; \tag{16**}$$

mais (form. 14): $m = k'\, n$, et par conséquent: $m \leqslant c \leqslant n$.

---

[1]) Cela résulte du théorème connu sur l'inversion, dans une région donnée, des fonctions analytiques; v. p. ex. H. Burkhardt, *Funktionentheoretische Vorlesungen*, Bd. II, VWV, Berlin 1920, p. 38 et 39; ou bien: Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. I, Teubner, 1923, p. 189 et sv.

On en voit que l'inégalité (10), énoncée précédemment, est toujours accomplie sauf les deux cas extrêmes: $k=0$ $(m=n)$ et $k=1$ $(m=0)$, où on a respectivement: $c=m=n$ $c=m=0$. Ces cas de dégénérescence exigent un traitement spécial que l'on trouvera dans le chapitre suivant.

À l'aide de la relation (16), on peut simplifier encore la condition (12): en effet, en y substituant l'expression du paramètre c et en tenant compte de la relation bien connue de Legendre, on obtient:

$$n\, C_1 = \frac{2\,K}{\pi} \cdot \tag{17}$$

Pour pouvoir continuer maintenant l'intégration le long de l'axe imainaire s au-dessus du point N, il suffit d'éviter ce point critique $t=i\,n$, de la même manière que précédemment, par les infiniment petites circonférences (fig. 4). Alors le point critique N entouré du côté droit, le radical $\sqrt{(t^2+m^2)\,t^2+n^2)}$ est de nouveau multiplié par i; sa valeur y devient, par conséquent, égale à: $-\sqrt{(s^2-m^2)\,(s^2-n^2)}$; au contraire, le point N entouré du côté gauche, le radical est multiplié par $-i$, et par suite, sa valeur y devient de même: $-\sqrt{(s^2-m^2)(s^2-n^2)}$. Il en résulte donc dans le plan des ζ_1 une configuration au point N semblable à celle au point M (fig. 3). À partir du point N, les valeurs de la fonction ζ_1 le long de l'axe imaginaire s sont ainsi déterminées, indépendamment du côté dont on y parvient, par la formule:

$$\zeta_1 = i + i\,C_1 \int\limits_n^s \frac{(s^2-c^2)\,d\,s}{\sqrt{(s^2-m^2)\,(s-n^2)^2}}\,; \qquad (s \geqslant n).$$

On en voit que lorsque le point t décrit l'axe imaginaire en tendant à l'infini, le point correspondant ζ_1 se dirige de même vers l'infini en suivant l'axe imaginaire η_1.

D'une manière toute analogue, le demi-plan inférieur des t se transforme en demi-plan inférieur des ζ_1 (voir les fig. 3 et 4).

Ainsi, on voit que la représentation cherchée est véritablement déterminée par la formule (9) à condition cependant que les paramètres vérifient les égalités (16) et (17).

Observons encore que, la fonction $\zeta_1(t)$ étant impaire (form. 9), il est évident que, à la ligne $L_1\,F\,L_2$ divisant le plan des ζ_1 en deux demi-plans symétriques par rapport à l'origine F, correspond dans le plan des t une ligne $L_1\,F\,L_2$, symétrique de même par rapport à l'origine $t=0$ (fig. 4).

Remarquons enfin que cette représentation, faisant correspondre au point à l'infini $t=\infty$ celui $\zeta_1=\infty$, y conserve de plus les directions, car il vient de la formule (9):

$$\lim_{t=\infty} \frac{\zeta_1}{t} = C_1\,, \tag{18}$$

et le paramètre C_1 est réel, d'après la définition même.

Les formules déduites plus haut résolvent prèsque complètement notre problème dans ce cas spécial quand l'arc choisi est symétrique par rapport à l'axe de parabole. En effet, on peut montrer aisément — ce que nous ferons plus loin par rapport au cas général — qu'il suffit encore de transformer le plan des t à l'aide de la fonction $T=t^2$ pour obtenir la représentation conforme de l'extérieur de l'arc symétrique de parabole sur l'extérieur d'un segment, et ensuite, moyennant une transformation bien connue, sur l'extérieur d'un cercle.

3. Cas général.

Il s'agit donc maintenant de généraliser la méthode pour le cas d'un arc asymétrique, c'est-à-dire pour le cas où dans le plan des ζ nos segments parallèles à l'axe des ξ ne sont pas symétriques par rapport à l'axe imaginaire η (fig. 2). Nous allons y parvenir de la manière suivante.

Envisageons la représentation conforme du plan des t sur un nouveau plan des $\zeta_2 = \xi_2 + i\,\eta_2$ que fait la fonction:

$$\zeta_2 = i\, C_2\, t, \tag{19}$$

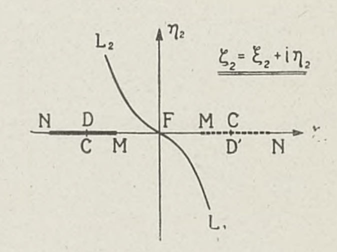


Fig. 5.

où C_2 est un coefficient réel. On obtient cette transformation en combinant une transformation par homothétie avec une rotation d'un angle $^1/_2\pi$ dans le sens positif (fig. 5). Considérons ensuite une nouvelle transformation determinée par la somme de deux fonctions ζ_1 et ζ_2:

$$\zeta(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t),$$

dont la première $\zeta_1(t)$ a été définie au paragraphe précédent. Ainsi nous avons:

$$\zeta(t) = C_1 \int_o^t \frac{(t^2+c^2)\,dt}{\sqrt{(t^2+m^2)(t^2+n^2)}} + i\,C_2\,t = i + C_1 \int_{\substack{im \\ in}}^t \frac{(t^2+c^2)\,dt}{\sqrt{(t^2+m^2)(t^2+n^2)}} + i\,C_2\,t, \tag{20}$$

où l'on peut prendre comme la limite inférieure d'intégration indifféremment le point $M(t = i\,m)$ ou $N(t = i\,n)$.

Nous allons examiner ci-dessous cette représentation d'une manière rapide en nous basant sur les résultats acquis auparavant par rapport au cas symétrique $(C_2 = 0)$.

Lorsque on passe de l'origine F du plan des t au point M, en suivant le segment FM, le point correspondant dans le plan des ζ décrit un contour curvilligne, issu de l'origine F, dirigé vers haut et à gauche ou à droite suivant que $C_2 > 0$ ou $C_2 < 0$, et aboutissant enfin au point M dont l'affixe est

$$\zeta_M = \zeta(im) = i - C_2\, m. \tag{21}$$

Au point M, le contour dérivé est brisé, en formant — comme précédemment — les angles droits (fig. 6). Cela devient clair, si nous observons que la dérivée $\frac{d\zeta_1}{dt}$ y a la valeur indéfiniment grande, tandis que $\frac{d\zeta_2}{d\,t}$ y reste évidemment finie et, par conséquent, peut y être négligée en comparaison de $\frac{d\zeta_1}{d\,t}$. À partir de ce point M, le point ζ décrit le segment parallèle à l'axe réel ξ en se dirigeant à droite ou à gauche suivant le cas où le point t suit le bord droit ou gauche de la fente MN.

Toutefois — relativement au cas précédent, symétrique — il apparaît ici cette différence que, si $C_2 > 0$, le point s'avance plus loin à gauche qu'à droite. Cela s'exprime bien par la formule:

$$\zeta = i \pm C_1 \int_m^s \frac{(c^2 - s^2)\,ds}{\sqrt{(s^2-m^2)(n^2-s^2)}} - C_2\, s, \qquad (m \leqslant s \leqslant n), \tag{22}$$

où il faut prendre (v. p. 7) le signe (+) ou (—) suivant que l'on décrit le bord droit ou gauche de la fente MN. Par suite, lorsque le point t, en suivant le côté gauche du segment MN, arrive au point C (fig. 4), le point correspondant, dans le plan des ζ, n'atteint pas encore sa position la plus avancée à gauche. Pour parvenir à ce point (nous le désignerons, comme toujours, dans tous les plans par la même lettre A), il faut passer, dans le plan des t, un peu plus haut, savoir jusqu'au point où la dérivée $\frac{d\zeta}{dt} = -i\,\frac{d\zeta}{ds} = 0$; on y a d'après la form (22):

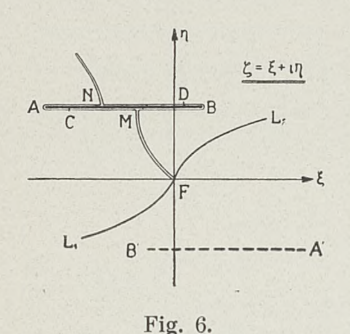


Fig. 6.

$$C_1 \frac{c^2 - s^2}{\sqrt{(c^2 - m^2)\,(n^2 - s^2)}} + C_2 = 0. \tag{23}$$

La valeur de s qui en résulte est évidemment plus grande que c.

Au contraire, si dans le plan des t on suit le côté droit du segment MN, le point correspondant dans le plan des ζ s'arrête avant que le point t arrive au point D; cela a lieu déjà au moment où t arrive au point B, où — d'après la form. 22 — la dérivée $\frac{d\zeta}{dt}$ devient égale à zéro:

$$C_1 \frac{c^2 - s^2}{\sqrt{(s^2 - m^2)\,(n^2 - s^2)}} - C_2 = 0\,. \tag{24}$$

On en voit bien que la valeur du paramètre c est plus grande que la valeur de s vérifiant cette équation. Par suite, dans le plan des ζ, le point D est situé à gauche du point B, sur la partie supérieure du segment AB (fig. 6).

Quant au point N, il est aisé de vérifier que, dans le plan des ζ, c'est toujours le point, où se rencontrent les deux contours provenant de l'intégration dans le plan des t, une fois le long du bord gauche et l'autre — le long du bord droit de la coupure MN. L'uniformité de la représentation est donc conservée. Relativement au cas illustré par la fig. 3, il apparaît seulement cette différence que les points M et N ne coïncident plus. En effet, l'affixe du point N — eu égard à la form. (20) — est maintenant:

$$\zeta_N = (i\,n) = i - C_2\,n, \tag{25}$$

tandis que l'affixe du point M est (form. 21): $\zeta_M = i - C_2\,m$.

Nous en voyons que dans le plan des ζ le point N est deplacé par rapport au point M à gauche; ce déplacement a la valeur: $\zeta_N - \zeta_M = -C_2\,(n - m)$.

Lorsqu'on continue, dans le plan des t, suivre l'axe imaginaire en se dirigeant du point N vers haut, le point correspondant ζ suit — indépendamment du côté dont on est parvenu au point N — la même ligne allant à l'infini (cette ligne est marquée sur la fig. 6 par un trait fin).

Jusqu'à ce moment nous avons examiné la correspondance entre deux demi-plans supérieurs. Quant aux demi-plans inférieurs, ils correspondent l'un à l'autre d'une façon analogue, car il résulte de la form. (20)

$$\zeta\,(-t) = -\zeta\,(t)\;. \tag{26}$$

C'est pour cela que le segment $A'B'$ est la symétrique du segment AB par rapport à l'origine F (fig. 6).

Nous allons examiner encore plus précisément le rôle de la ligne $L_1 F L_2$, divisant chaque plan considéré en deux demi-plans. D'après ce qu'on a vu auparavant, cette

ligne doit être — dans le plan des ζ — symétrique par rapport à l'origine F. Pour que cette condition soit accomplie, il suffit (voir la form. 26) de choisir, dans le plan des t, une ligne $L_1 F L_2$ de cette espèce, symétrique par rapport à l'origine $t = 0$.

Transformons ensuite le demi-plan supérieur des t à l'aide de la fonction

$$T = t^2. \tag{27}$$

Alors, dans le nouveau plan des T, les deux courbes, correspondant aux deux branches $F L_1$ et $F L_2$ de la ligne en question, coïncideront point par point, tandis que le segment MN sera transporté de la partie positive de l'axe imaginaire du plan des t sur la partie négative de l'axe réel du plan des T (fig. 7).

Quant au demi-plan inférieur des t, c'est le deuxième feuillet de la surface de Riemann relative au radical $\sqrt{T}$ qui lui correspond — elle est, d'ailleurs, sans importance pour notre problème.

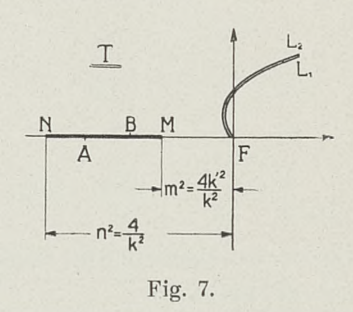


Fig. 7.

Ainsi nous avons obtenu trois formules fondamentales (5), (20) et (27) qui définissent nos transformations successives. Il en résulte une relation entre les variables complexes z et T: $z = \varphi(T)$ ou bien $T = \psi(z)$. D'après ce que l'on vient de voir, cette relation détermine une transformation de l'arc de parabole envisagé en un segment; en outre, elle fait correspondre, d'une façon biunivoque et conforme, l'extérieur de l'arc de parabole sur l'extérieur du segment correspondant, toutefois ces extérieurs sont coupés le long des lignes FL, formant deux fentes correspondant l'une à l'autre.

Or on peut démontrer aisément que lorsqu'il s'agit du résultat final de la représentation considérée, les coupures indéfinies FL sont sans importance et, bien plus, qu'elles peuvent être laissées de côté. À cet effet, il suffit évidemment de montrer que le point F ($z = 0$; $T = 0$), dont ces coupures sont issues, ne constitue ni point critique de la fonction $z = \varphi(T)$, ni — de la fonction inverse $T = \psi(z)$. Observons d'abord que la fonction $\zeta = \zeta(t)$ qui définit la représentation intermédiaire est régulière au point $t = 0$. Par suite, elle peut être développée dans le voisinage de ce point en *série de Taylor*, convergente pour tout point intérieur à un certain cercle décrit du point F ($t = 0$) comme centre (il suit de la form. (20) que le rayon de ce cercle de convergence est égal à m). Il en résulte aussi le développement de la fonction inverse $t = t(\zeta)$, le rayon de convergence de la série obtenue étant égal à $|\zeta_M| = |i - C_2 m|$. À l'aide de ces développements on trouve immédiatement les développements des fonctions $z(T)$ et $T(z)$, valables dans le voisinage du point F (voir *Th*):

$$z = \varphi(T) = \frac{p}{2}\,\zeta^2 = \frac{p}{2}\,b_0^2\,t^2\,(1 + 2\,b_1\,t^2 + \cdots) = \frac{p}{2}\,b_0^2\,T\,(1 + 2\,b_1\,T + \cdots);$$

$$T = \psi(z) = t^2 = \frac{\zeta^2}{b_0^2}\,(1 + 2\,b'_1\,\zeta^2 + \cdots) = \frac{2}{p\,b_0^2}\,z\,(1 + 4\,\frac{b'_1}{p}\,z + \cdots).$$

Nous en voyons donc que, dans ces deux plans, celui des z et celui des T, les origines F ($T = 0$; $z = 0$) sont des points réguliers pour les fonctions $\varphi(T)$ et $\psi(z)$. Ainsi dans la transformation finale des deux plans, des z et des T, les coupures FL disparaissent. Il s'ensuit de là que la forme précise de la ligne $L_1 F L_2$, divisant chacun de deux plans, des ζ et des t, en deux demi-plans, est tout indifférente (à condition, bien entendu, que cette ligne $L_1 F L_2$ serait symétrique dans chaque plan par rapport au point F). D'ailleurs, dans les cas des représentations auxiliaires qui nécessitent l'existance de cette coupure

$L_1 F L_2$, nous supposerons toujours que ce soit l'axe réel qui joue, dans le plan des t, le rôle de la ligne $L_1 F L_2$ (voir fig. 8).

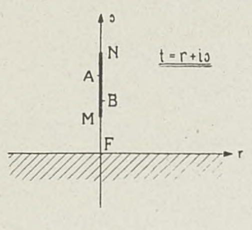


Fig. 8.

Nous venons donc de trouver la biunivoque représentation conforme de tout l'extérieur d'un arc quelconque AB de parabole sur l'extérieur du segment MN, tout entier. En vue des applications postérieures, nous allons introduire encore une transformation, savoir: la représentation conforme de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur de notre segment.

Soit Q le cercle en question, situé dans un nouveau plan des Z et décrit avec le rayon a de l'origine O comme centre. La représentation cherchée est déterminée par la formule:

$$T+\frac{m^2+n^2}{2}=\frac{Z}{a}e^{-i\beta}+\frac{a}{Z}e^{i\beta}\quad , \tag{28}$$

à la condition cependant que les paramètres m et n vérifient l'équation:

$$n^2-m^2=4. \tag{29}$$

Cette condition correspond à ce fait bien connu que, dans le cas où la transformation du cercle sur le segment tend vers l'identité pour les points infiniment éloignés, la longueur du segment dérivé est quatre fois plus grande que le rayon du cercle générateur.

En combinant la condition (29) avec les relations (14), (16*), et (17), on peut exprimer les paramètres m, n, c et C_1 à l'aide du module k et de ses fonctions: k', K et E.

$$m=2\frac{k'}{k};\qquad n=\frac{2}{k};\qquad c^2=\frac{4}{k^2}\cdot\frac{E}{K};\qquad C_1=k\frac{K}{\pi}\cdot \tag{30}$$

Par suite, on peut écrire la formule (28) sous la forme:

$$T=\frac{Z}{a}e^{-i\beta}+\frac{a}{Z}e^{i\beta}+2-\frac{4}{k^2}\cdot \tag{31}$$

Quant au paramètre β, nous l'avons introduit en vue de pouvoir effectuer une rotation du plan des Z par rapport à celui des T de la manière à établir une concordance désirable entre les directions correspondantes des éléments linéaires infiniment éloignés, situés respectivement dans les deux plans, celui des z et celui des Z. Il résulte de la form. (31) que le paramètre β définie la position des points M et N sur la circonférence $|Z|=a$ (fig. 9), savoir: $Z_M=a e^{i\beta}$ et $Z_N=-a e^{i\beta}$; ainsi, la droite NM forme un angle β avec la direction positive de l'axe des X. Remarquons encore que, à l'origine F du plan des z correspond dans le plan des Z le point F, situé sur le prolongement du même segment MN, au délà du point M; son affixe s'exprime:

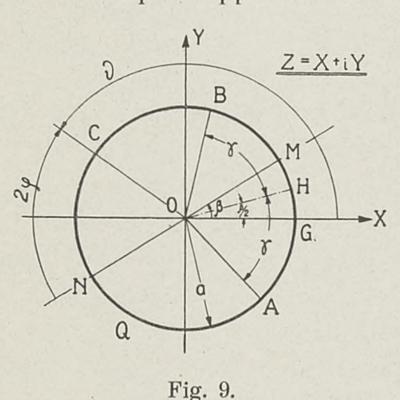


Fig. 9.

$$Z_F=\frac{1+k'}{1-k'}a e^{i\beta};\qquad (z=\zeta=t=T=0).$$

Ainsi, les formules (5), (20), (27) et (31), déterminent déjà la fonction fondamentale (1)

$$z=f(Z)$$

qui donne la représentation cherchée.

Il est commode dans certains cas d'exprimer cette représentation sans entremise des variables t et T, en gardant seulement la variable intermédiare ζ. À cet effet, envisageons d'abord la variable t (form. 27 et 31):

$$t = \sqrt{T} = \sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}} \,. \tag{32}$$

Il est à remarquer qu'il s'agit ici de cette détermination du radical qui devient égal à $+im$ pour $Z = +ae^{i\beta}$ (ce radical étant égal à t, sa partie imaginaire est toujours positive). Substituons ensuite cette valeur (32) de t dans la form. (20). Il viendra alors de cette formule (il y faut bien tenir compte de la détermination admise du radical $\sqrt{(t^2+m^2)\,(t^2+n^2)}$ — v. p. 6):

$$\zeta = i + C_1 \int\limits_{\pm ae^{i\beta}}^{Z} \frac{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2} + c^2}{2Z\sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}}}\, dZ + iC_2 \sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}} \,, \tag{33}$$

où l'on peut prendre comme la limite inférieure d'intégration indifféremment le point $M\,(Z = +ae^{i\beta})$ ou bien $N\,(Z = -ae^{i\beta})$.

En vue des applications ultérieures, nous allons transformer encore la form. (33) en partant de la relation évidente:

$$\sqrt{T} = \int\limits_{Z=-ae^{i\beta}}^{Z} d\sqrt{T} + \sqrt{T}_{Z=-ae^{i\beta}} = \int\limits_{-ae^{i\beta}}^{Z} \frac{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} - \frac{a}{Z} e^{i\beta}}{2Z\sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}}}\, dZ + \frac{2i}{k} \,.$$

Il vient donc:

$$\zeta = i - \frac{2C_2}{k} + \int\limits_{-ae^{i\beta}}^{Z} \frac{(C_1 + iC_2)\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + (C_1 - iC_2)\frac{a}{Z} e^{i\beta} + C_1\left(2 - \frac{4}{k^2} + c^2\right)}{2Z\sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}}}\, dZ \tag{34}$$

Pour fixer définitivement les paramètres qui interviennent dans ces formules, il faut encore satisfaire à la condition générale (2*), posée au début du chapitre: $\lim\limits_{Z=\infty} \frac{z}{Z} = 1$. Or, d'après les formules (5) et (34):

$$\frac{dz}{dZ}_{Z=\infty} = \frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dZ} = (C_1 + iC_2)\, e^{-i\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{pz}{2aZ}}_{\substack{z=\infty\\ Z=\infty}} \,. \tag{35}$$

Les points Z et z tendent simultanément vers l'infini; il est clair donc que la condition (2*) ne sera accomplie que si l'on pose

$$C_1 + iC_2 = e^{i\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{2a}{p}} \,, \tag{36}$$

d'où: $C_1 = \sqrt{\frac{2a}{p}} \cos \frac{\beta}{2}$; $C_2 = \sqrt{\frac{2a}{p}} \sin \frac{\beta}{2}$;

mais nous avons trouvé précédemment (form. 30): $C_1 = k \frac{K}{\pi}$; par suite:

$$C_2 = C_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = k \frac{K}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{a} = \frac{\pi^2}{k^2 K^2} (1 + \cos \beta). \tag{37}$$

Ainsi nous avons exprimé tous les coefficients qui interviennent dans notre représentation conforme par les seuls paramètres indépendants: a, k et β. En portant ces relations dans les formules (33) et (34), nous obtenons le résultat définitif de notre représentation conforme sous l'une des formes:

$$\zeta = \frac{kK}{\pi \cos \frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{z}{a}} = i + i \frac{kK}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}} +$$

$$+ \frac{kK}{\pi} \int_{\pm a e^{i\beta}}^{z} \frac{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} - 2\mu}{2Z \sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{4}{k^2}}} dZ, \tag{38}$$

$$= \frac{kK}{\pi \cos \frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{z}{a}} = i - 2 \frac{K}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{kK}{\pi \cos \frac{\beta}{2}} \int_{-a e^{i\beta}}^{z} \frac{\frac{Z}{a} e^{-i\frac{\beta}{2}} + \frac{a}{Z} e^{i\frac{\beta}{2}} - 2\mu \cos \frac{\beta}{2}}{2Z \sqrt{\frac{Z}{a} e^{-i\beta} + \frac{a}{Z} e^{i\beta} + 2 - \frac{k^2}{4}}} dZ, \tag{39}$$

où nous avons posé — pour abréger:

$$\mu = \frac{2}{k^2} \left(1 - \frac{E}{K} \right) - 1. \tag{40}$$

Ainsi, la représentation conforme envisagée dépend exclusivement de d e u x p a r a m è t r e s p r i m i t i f s k et β (sans compter le coefficient a déterminant le rayon du cercle générateur Q et n'influant que sur l'échelle de la représentation).

Il faut observer que le paramètre k, étant le module des intégrales elliptiques K et E, est compris dans l'intervalle fermé: $0 \leqslant k \leqslant 1$. Il en résulte aussi (voir *Th*) que la quantité $\mu(k)$ varie dans le même intervalle (fig. 10).

Quant au paramètre β, on peut s'assurer par un coup d'oeil sur la fig. 9 qu'il suffit de ne considérer que des valeurs des β comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. D'ailleurs, on peut très bien laisser de côté les limites mêmes $\pm\pi$ de l'intervalle, car alors notre arc de parabole se réduit à un segment situé sur l'axe des x: en effet, lorsque $\beta = \pm\pi$ ($p = 0$), il vient de la form. (38):

$$\beta = \pm\pi; \qquad \frac{z}{a} = \frac{Z}{a} + \frac{a}{Z} - 2 + \frac{4}{k^2}. \tag{41}$$

On en voit que c'est un segment dont la longueur l est égale à $4a$ et dont les extrémités possèdent les abscisses $4\frac{k'^2}{k^2}a$ et $\frac{4}{k^2}a$. Désormais nous écarterons ce cas, en posant:

$$-\pi < \beta < +\pi. \qquad (42)$$

Lorsque $\beta = 0$, on revient sur le cas symétrique.

Quant aux paramètres paraboliques ξ_A et ξ_B qui définissent avec le paramètre p la position de l'arc envisagé AB dans le plan des z, ils s'expriment facilement — comme nous allons voir dans le chapitre suivant — en fonction des paramètres primitifs, k et β, et cela à l'aide des formules bien adaptées aux calculs numériques.

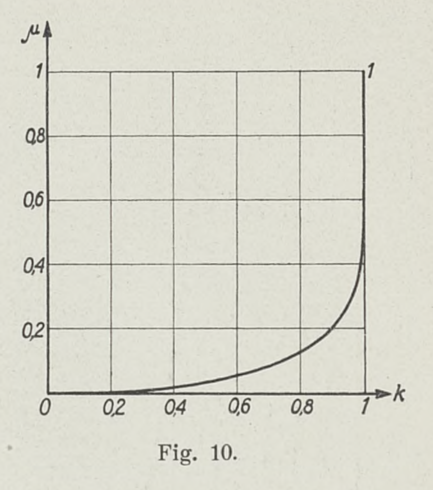


Fig. 10.

CHAPITRE II.

Étude détaillée de la représentation conforme précédente.

Nous avons résolu le problème posé dans le chapitre précédent, en trouvant les formules analytiques déterminant la correspondance biunivoque de l'extérieur du cercle générateur (y compris le contour même) sur l'extérieur (et le contour) de l'arc de parabole; la représentation obtenue est partout conforme, sauf les deux points, A et B, formant les extrémités de cet arc de parabole.

Mais lorsqu'il s'agit des applications aux questions concrètes qui nécessitent des calculs numériques, il ne suffit plus la possibilité théorique des calculs — il faut donner, au contraire, des formules qui soient propres à l'exécution pratique des calculs numériques.

A ce point de vue, les formules finales (38) et (39) du chapitre précédent ne suffisent pas encore: on doit les transformer convenablement, ce que nous alons faire dans ce chapitre.

Mais, par avance, nous voulons examiner quelques propriétés générales de la représentation étudiée, ces propriétés dépendant directement de valeurs des paramètres β et k.

1. Paramètre de la parabole p.

Examinons d'abord, comment dépend de ces paramètres la forme de la parabole sur laquelle se trouve notre arc AB. Or, le rayon a du cercle générateur étant supposé constant, la forme de cette parabole est entièrement déterminée par son paramètre p (form. 37). On en voit que lorsque le module k croît de 0 à 1, le paramètre p décroît de ∞ à 0, car l'intégrale $K(k)$ croît simultanément de $\frac{\pi}{2}$ à ∞. Quant au paramètre β, chaque écartement de cet angle de la valeur $\beta = 0$, indiféremment de son signe, entraîne une diminution du paramètre p de la parabole. Par conséquent, si k et $|\beta|$ sont petits, les paraboles considérées sont très éloignées de l'origine; tandis que, si k s'approche de l'unité, ou bien si β tend vers $\pm\pi$, les sommets des paraboles s'approchent de l'origine (voir fig. 1). Cette

dépendance est bien illustrée par les diagrammes ci-dessous, où le module k est remplacé— suivant l'usage — par l'angle modulaire θ:

$$\theta = \arc\sin k; \qquad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{43}$$

On voit sur la fig. 11 que l'allure de toutes les courbes, représentant la variation du paramètre $\frac{p}{a}$ en fonction de l'angle modulaire θ, est pareille; cela est bien compréhensible, car elles se déduisent, l'une de l'autre, par simple variation d'un seul facteur $(1 + \cos\beta)$. De plus, toutes ces courbes possèdent au point $\left(\theta = \frac{\pi}{2}; p = 0\right)$ la tangente commune, parallèle à l'axe des ordonnées $\frac{p}{a}$, ce qu'on voit bien sur la fig. 11, où l'on a reproduit encore cette partie du diagramme dans une échelle plus grande. On peut d'ailleurs très aisément démontrer analytiquement cette propriété en calculant la dérivée $\frac{dp}{d\theta}$ (voir *Th*). Remarquons encore que les courbes en question possèdent un point d'inflexion ayant la même abscisse; la valeur de cette abscisse vérifie l'équation $\frac{E}{K}\left(1 - 3\frac{E}{K}\right) = k'^2$; on en tire: $k = 0{,}8536$ (c. à. d. $\theta = 81^0, 6$).

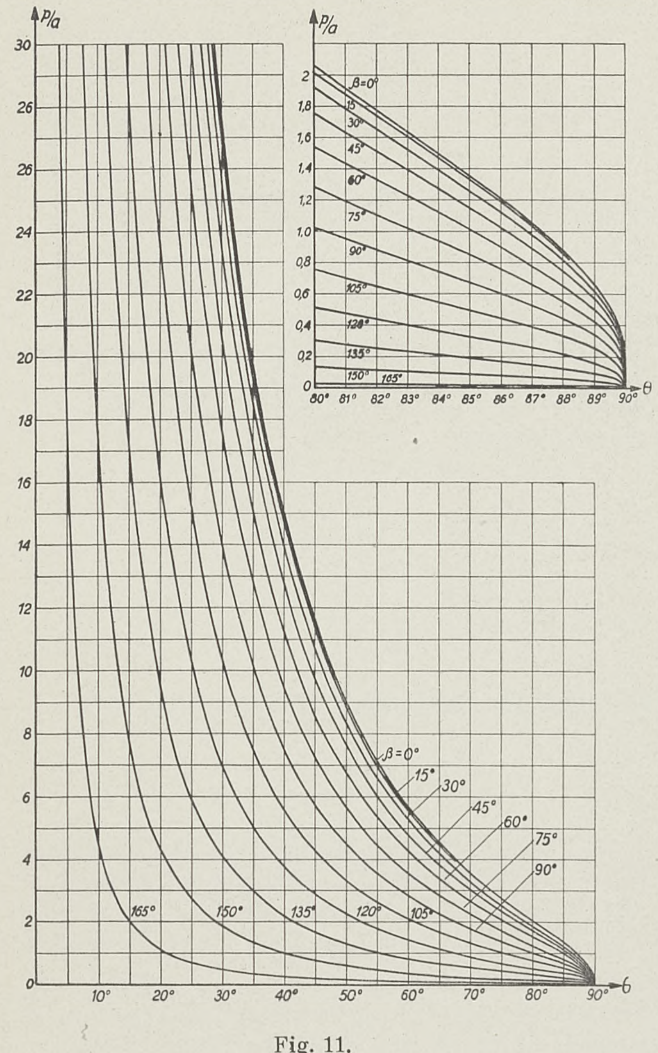


Fig. 11.

2. Position des points A et B sur le cercle générateur.

Pour déterminer la position des extrémités de l'arc AB sur la parabole, il faut chercher d'abord la position des points correspondants, Z_A et Z_B, situés sur le cercle générateur $|Z| = a$. Il est évident que, ces points, A et B, formant les *pointes* du contour transformé, il y doit être:

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{A,B} = 0 \qquad \text{et également} \qquad \left(\frac{d\zeta}{dZ}\right)_{A,B} = 0. \tag{44}$$

Pour que ces équations soient vérifiées, il faut et il suffit qu'il soit (voir la form. 39):

$$\frac{Z}{a} e^{-i\frac{\beta}{2}} + \frac{a}{Z} e^{i\frac{\beta}{2}} - 2\mu \cos\frac{\beta}{2} = 0. \tag{45}$$

Dans le plan des Z, les points A et B sont situés sur le cercle de rayon a, ayant pour centre l'origine de coordonnées; on peut poser donc:

$$Z = a\, e^{i\vartheta}, \tag{46}$$

où ϑ désigne l'angle polaire, compté à partir de l'axe réel OX (comme sens positif est admis celui qui amène l'axe OX sur OY par une rotation d'un angle droit). Nous posons (voir *Th*), une fois pour toutes:

$$\beta \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi + \beta. \tag{47}$$

Il s'ensuit donc de l'équation (45):

$$\cos\left(\vartheta - \frac{\beta}{2}\right) = \mu \cos\frac{\beta}{2}. \tag{48}$$

Cette équation a des racines pour chaque valeur de β, car la quantité $\mu(k)$ est toujours comprise entre 0 et 1 (*l. c.*). Introduisons encore l'angle auxiliaire γ, en posant:

$$\cos\gamma = \mu\cos\frac{\beta}{2}. \tag{49}$$

L'angle β étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (form. 42) et la quantité μ — entre 0 et 1, il est clair qu'il suffit d'admettre que l'angle γ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Mais alors, il résulte de la form. (49) qu'on a toujours:

$$\left|\frac{\beta}{2}\right| \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{50}$$

Ainsi, l'équation (48) servant à déterminer les coordonnées polaires, ϑ_A et ϑ_B, des points A et B situés sur le cercle primitif $|Z| = a$, se réduit à

$$\cos\left(\vartheta - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\gamma. \tag{51}$$

Ses racines s'exprimeront donc par deux groupes des angles:

$$\frac{\beta}{2} + \gamma + 2\pi n_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\beta}{2} - \gamma + 2\pi n_2,$$

où n_1 et n_2 désignent des nombres entiers quelconques. Mais, en se repportant à la relation admise (47), on voit bien qu'il faut supposer: $n_1 = 0$ et $n_2 = 1$.

Il ne reste donc que deux racines. Pour décider enfin quelle racine faut-il attribuer à la coordonnée ϑ_A et quelle — à ϑ_B, tenons compte de cette circonstance que dans le cas de symétrie ($\beta = 0$) la configuration des points A et B par rapport à l'axe réel doit être de la même espèce dans les deux plans, celui des Z et celui des z; cela veut dire que le point B doit être situé au-dessus du point A. Il en résulte que l'on a en général:

$$\vartheta_A = \frac{\beta}{2} - \gamma + 2\pi; \qquad \vartheta_B = \frac{\beta}{2} + \gamma. \tag{52}$$

Ces formules montrent que les points A et B, situés sur la circonférence génératrice $|Z| = a$, sont symétriques par rapport au rayon OH formant avec l'axe OX l'angle $\frac{\beta}{2}$; on voit de plus que l'angle formé par des rayons vecteurs OA et OB est égal à 2γ (fig. 9).

Remarquons encore que, lorsque le module k tend vers 0, l'angle γ s'approche de $\frac{\pi}{2}$. Dans l'autre cas extrême ($k = 1$), on a: $\gamma = \left|\frac{\beta}{2}\right|$; alors, si $\beta > 0$, le point A vient au point G ($Z = a$), tandis que le point B coïncide avec M; au contraire, si $\beta < 0$, c'est le point A qui coïncide avec le point M se trouvant alors sous l'axe OX, et c'est le point B qui vient à G.

3. Réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.

Les affixes Z_A et Z_B des points correspondant aux extrémités de l'arc de parabole étant connus, les coordonnées de cet arc sont déterminées par la form. (38) ou (39). Ces coordonnées calculées, on peut déjà tracer tout l'arc AB, car la parabole, sur laquelle est situé cet arc, est entièrement déterminée par la valeur du paramètre p, calculé précédemment.

Mais, comme nous avons remarqué déjà, les formules en question ne se présentent pas encore sous une forme commode aux calculs numériques. Or, dans certains cas spéciaux, lorsque les intégrales elliptiques intervenant dans ces formules deviennent réelles ou purement imaginaires, le problème du calcul se simplifie beaucoup: on peut alors réduire aisément ces intégrales à la forme canonique qui permette immédiatement de faire usage des Tables numériques, calculés par Legendre. Ces cas ont lieu lorsqu'il s'agit des coordonnées des points de l'arc parabolique AB même, ou bien des points correspondant à ceux qui sont situés sur la droite MN, d'un ou d'autre côté du cercle générateur $|Z| = a$ (fig. 9).

En passant maintenant à la réduction des intégrales considérées à la *forme normale des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce :*

$$\int_o^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}}, \qquad \int_o^W \frac{W^2\,dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}},$$

nous prenons comme point de départ la form. (20) qui exprime ζ en fonction de t, en y remplaçant cependant les quantités m, n, c, C_1 et C_2 par leurs expressions (30) et (37).

Or observons que, sans tenir compte de signe, on peut distinguer dans le plan des t quatre intervalles, un — réel, et trois — purement imaginaires, délimités par les points caractéristiques: $t = \infty$, $t = 0$, $t = 2i\frac{k'}{k}$ et $t = \frac{2i}{k}$, où nos intégrales elliptiques deviennent ou bien réelles, ou bien purement imaginaires. Il en résulte qu'il doit exister quatre transformations réduisant ces intégrales à la forme normale. Ces transformations sont respectivement de la forme :

$$t^2 = 4\frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{W_1^2}{1-W_1^2}; \quad t = 2i\frac{k'}{k}W_2; \quad t^2 = 4W_3^2 - \frac{4}{k^2}; \quad t^2 = -\frac{4}{k^2}\cdot\frac{1-k'^2W_4^2}{1-W_4^2} \tag{53}$$

Nous allons faire usage ici seulement de la troisième transformation[1]) qui sert au calcul des coordonnées des points situés sur l'arc de parabole AB. On peut l'écrire sous la forme:

$$W = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + \frac{4}{k^2}}\,. \tag{54}$$

Fig. 12.

Nous y admettons cette détermination du radical qui est purement imaginaire positive pour les valeurs des t correspondant aux points situés sur l'axe imaginaire, au-dessus du point N. Alors, il en résulte la représentation conforme du demi-plan supérieur des t, muni de la fente rectiligne MN, sur le demi-plan supérieur des W depourvu de toute coupure (à la fente MN y correspond simplement une portion du bord rectiligne — voir la fig. 12 en la comparant avec les fig. 7 et 8, ce qui offre un bon aperçu général de la transformation en question).

---

[1]) On peut trouver l'analyse des autres transformations dans le travail cité déjà à plusieurs reprises (*Th:* p. 48 — 55).

Le changement de variable (54), ainsi déterminé, transforme une des formules (20) en

$$\zeta = i + \frac{2K}{\pi}\left[\left(1-\frac{E}{K}\right)\int\limits_o^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)\,(1-k^2W^2)}} - k^2\int\limits_o^W \frac{W^2\,dW}{\sqrt{(1-W^2)\,(1-k^2W^2)}} - \right.$$

$$\left. -\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt{1-k^2W^2}\,\right], \tag{55}$$

où il faut attribuer aux radicaux ces valeurs dont la partie réelle est positive. Ensuite, comme il résulte des form. (32) et (54):

$$W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z}{a}e^{-i\beta}+\frac{a}{Z}e^{i\beta}+2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{Z}{a}e^{-i\beta}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{Z}e^{i\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{56}$$

la détermination des radicaux étant fixée par la condition que la partie imaginaire de W soit positive pour chaque valeur de Z.

Ajoutons encore aux considérations précédentes quelques remarques générales.

Rappelons d'abord que les intégrales elliptiques en question ne sont réelles que dans le cas où la variable d'intégration parcourt l'intervalle réel et fini $(-1, +1)$. Il est important que l'on peut alors, par une simple substitution réelle

$$W = \sin\varphi \quad , \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{2}\right), \tag{57}$$

ramener ces intégrales à la forme[1]) canonique de L e g e n d r e:

$$F(\varphi, k) = \int\limits_o^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad \text{et} \qquad E(\varphi, k) = \int\limits_o^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi \tag{58}$$

Comme il résulte de la discussion précédente, ce cas simple n'a lieu que dans l'hypothèse que la variable Z décrit la circonférence $|Z| = a$, ou bien les deux parties de la droite MN, situées à l'extérieur de ce cercle $|Z| = a$ (fig. 9).

4. Formules servant au calcul des coordonnées de l'arc de parabole AB.

Prenons en considération les formules, déduites dans le paragraphe précédent, en y supposant de plus que le point W ne quitte pas le segment $(-1, +1)$ (fig. 12). En portant ensuite dans la form. (55) la substitution réelle (57), et en utilisant les notations (58), on trouve immédiatement la formule fondamentale déterminant les coordonnées paraboliques de notre arc AB:

$$\eta = 1, \qquad \xi = \frac{2K}{\pi}\left[E(\varphi, k) - \frac{E}{K}F(\varphi, k) - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\right], \tag{59}$$

où il faut attribuer au radical sa valeur arithmétique.

---

[1]) Il peut y figurer aussi, au lieu du module k, le module complémentaire k'.

Remarquons que le paramètre φ possède une très simple signification géométrique. En effet, le point W étant situé sur le segment $(-1, +1)$, le point cerrespondant Z se trouve sur la circonférence $|Z| = a$; on peut donc poser (form. 46):

$$Z = a\, e^{i\vartheta},$$

et l'on obtient alors de la form. (56), en prenant la détermination convenable (fig. 12):

$$W = \sin\varphi = \cos\frac{\vartheta - \beta}{2}\,.$$

Etant posé (47): $\beta \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi + \beta$, et (57): $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{2}$,

il vient donc:

$$\varphi = \frac{\pi + \beta - \vartheta}{2} \qquad \text{ou} \qquad \vartheta = \pi + \beta - 2\varphi\,. \tag{60}$$

Nous en voyons que la valeur de φ désigne la moitié de l'angle formé par le rayon fixe ON et le rayon vecteur OC du point C (fig. 9); quant au signe, il est positif quand ce point se trouve du même côté du diamètre MN que le point B, et négatif — dans le cas contraire.

Ainsi, en utilisant les formules (60) et (59), bien propres aux calculs numériques, nous pouvons facilement trouver la coordonnée parabolique ξ de chaque point de notre arc de parabole, et ensuite (voir la form. 6) — ses coordonnées rectilignes:

$$x = \frac{p}{2}(\xi^2 - 1)\,; \qquad y = p\,\xi\,. \tag{61}$$

Quant au paramètre p, il est déterminé par la form. (37).

D'ailleurs, pour examiner la position que peut occuper notre arc de parabole, il suffit de calculer les coordonnées des ses extrémités A et B. Or il vient des formules (52) et (60):

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_A = -\frac{\pi - \gamma - \frac{\beta}{2}}{2} < 0\,, \qquad 0 < \varphi_B = \frac{\pi - \gamma + \frac{\beta}{2}}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\,, \tag{62}$$

les signes d'inégalités résultant des relations (42) et (50).

En calculant les valeurs de ξ à l'aide de la form. (59), on doit tenir compte de ce que

$$E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k) \qquad \text{et de même} \qquad F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k)\,,$$

ce qui permet déjà faire usage des Tables de Legendre[1]).

Un coup d'oeil sur les formules (62) nous montre aussi que, si l'on change β en $-\beta$, l'angle φ_A devient $-\varphi_B$ et *vice versa*. Il en résulte (voir form. 59 et 61) que les deux arcs de parabole: $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$, pour lesquels $k_1 = k_2$ et $\beta_1 = -\beta_2$, sont symétriques par rapport à l'axe réel de sorte qu'au point A_1 correspond B_2, et à B_1 — le point A_2. Par conséquent, au point de vue géométrique, il suffit d'envisager exclusivement les cas où: $\beta \geqslant 0$.

Nous commencerons l'analyse de la représentation considérée par l'examen des cas extrêmes, $k = 0$ et $k = 1$, ce qui nous permettra d'obtenir d'un coup les cadres généraux renfermant tous les autres cas intermédiaires. Or, un aperçu sommaire des formules trou-

---

[1]) Tables de Legendre originales sont maintenant peu accessibles, mais on peut les trouver reproduites dans: L. Potin, *Formules et Tables numériques*, G. Doin et Gauthier-Villars, Paris 1925.

vées nous montre immédiatement que ces cas extrêmes constituent des cas de dégénérescence, et que l'on ne peut les considérer que comme des limites vers lesquelles tend la fonction de représentation lorsque le module k tend vers zéro ou vers l'unité (dans ce dernier cas, c'est le module complémentaire k' qui tend vers zéro).

5. Premier cas de dégénérescence : $k=0$.

Si l'on pose dans la form. (59) : $k=0$, on obtient :

$$\eta = 1; \qquad \xi = -\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \tag{63}$$

car :

$$E(\varphi, 0) = F(\varphi, 0) = \varphi, \qquad E = K = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que l'arc de parabole AB s'éloigne alors vers l'infini :

$$z = \frac{p}{2}\zeta^2 = \frac{2a}{k^2}(1+\cos\beta)\left(i - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2 = -\frac{4a}{k^2}e^{i\beta}. \tag{64}$$

Bien plus, cette formule nous donne la direction suivant laquelle s'éloigne l'arc AB, lorsque k tend vers zéro : c'est la direction du rayon vecteur qui forme l'angle $\pi+\beta$ avec l'axe des x (fig. 13) — c'est aussi la direction de la droite MN (fig. 9).

Il résulte aussi de la form. (63) que, dans le plan des z, la tangente au profil cherché est inclinée vers l'axe des x, sous un angle constant τ (form. 8) :

$$\operatorname{ctg}\tau = \xi = -\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \tau = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}, \tag{65}$$

Fig. 13.

ce qui montre que, dans le cas $k=0$, l'arc de parabole AB dégénère en un segment. Ce fait pourra être démontré directement, si l'on trouve le développement de la fonction de transformation, procédant suivant les puissances croissantes du module k (voir *Th*, p. 63) :

$$z = -\frac{4a}{k^2}e^{i\beta} + 2a\,e^{i\beta} + Z - \frac{a^2}{Z}e^{i\beta} + \frac{k^2}{4}a(1+e^{i\beta})\left(1 - \frac{a^2}{4Z^2}e^{i\beta}\right) + \cdots$$

En y négligeant les termes infiniment petits, de dégré k^2 et supérieurs, et en faisant abstraction du terme constant — ce qui revient à faire une translation du profil considéré — on en tire :

$$z = Z - \frac{a^2}{Z}e^{i\beta},$$

d'où, en introduisant les coordonnées polaires (46) :

$$Z = a\,e^{i\vartheta}; \qquad \frac{x}{a} = -2\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\vartheta - \frac{\beta}{2}\right); \qquad \frac{y}{a} = 2\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\vartheta - \frac{\beta}{2}\right). \tag{66}$$

Ainsi, dans le premier cas extrême $k=0$, l'arc de parabole AB dégénère en un segment, dont la longueur est égale à $4a$, et qui est incliné vers l'axe des x sous un angle (fig. 13) : $\tau = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$.

6. Deuxième cas de dégénérescence: $k = 1$.

L'analyse de ce cas est plus compliquée.

Le module k tendant vers l'unité et k' vers zéro, l'intégrale K augmente indéfiniment comme logarithme, et par suite le paramètre de la parabole $p = 2a \frac{\pi^2}{k^2 K^2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$ tend vers zéro. Il en résulte que l'arc considéré AB est situé sur la parabole entourant de plus proche la partie positive de l'axe des x (fig. 14); on en conclut aussi (voir la form. 59) que l'ordonnée $y = p\xi$ tend alors vers zéro comme $\frac{1}{K}$. Quant aux abscisses, on peut les exprimer, en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{1}{K^2}$ et supérieurs, par la formule:

$$x \cong 4a \left\{ \left[E(\varphi, k) - \frac{E}{K} F(\varphi, k) \right] \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \varphi \right\}^2 . \tag{67}$$

Ce qu'il faut examiner attentivement dans cette formule, c'est la limite vers laquelle tend le rapport

$$\lambda(\varphi_C) = \lim_{k=1} \frac{F(\varphi_C, k)}{K(k)} , \tag{68}$$

où l'angle φ_C correspond, d'après la form. (60), au point envisagé C de la circonférence $|Z| = a$. D'une façon générale, l'amplitude φ_C est une fonction du module k (comme par exemple φ_A et φ_B) et, par suite, la limite λ dépend en général non seulement de la valeur limite vers laquelle tend l'amplitude φ lorsque k tend vers l'unité, mais de plus, de la façon dont φ s'approche de sa limite. On y peut distinguer cependant deux cas généraux, très simples.

Le premier cas est celui, lorsque l'amplitude φ, pour le module k tendant vers l'unité, reste — en valeur absolue — moindre que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (ε désignant une constante positive qui peut être arbitrairement petite). Il est évident que l'on a alors tout simplement:

$$\lambda_{|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon} = 0 .$$

Ce cas a lieu, lorsque le point Z se meut sur la circonférence $|Z| = a$, sans empiéter cependant sur l'arc (arbitrairement petit, mais de la longueur constante 4ε) entourant le point M ($\vartheta = \beta$), des deux côtés d'une manière égale.

L'autre cas tout simple a lieu, lorsque l'amplitude φ est constamment égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$; alors, il vient immédiatement de la form. (68):

$$\lambda_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} = -1 .$$

Ainsi, dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque

$$\beta + 2\varepsilon < \vartheta < 2\pi + \beta - 2\varepsilon ,$$

on a:

$$\lambda = 0 ; \quad \lim_{k=1} x = 4a \left(\cos \frac{\beta}{2} \sin \varphi - \sin \frac{\beta}{2} \cos \varphi \right)^2 = 4a \sin^2 \left(\varphi - \frac{\beta}{2} \right) = 2a(1 + \cos \vartheta) . \tag{69}$$

Quant à la variable y, elle tend vers zéro en conservant le signe de la variable ξ, c'est-à-dire le signe de l'expression $\sin \left(\varphi - \frac{\beta}{2} \right)$:

$$\lim_{k=1} y = 0 \,.\, \operatorname{sgn} \xi = 0 \,.\, \operatorname{sgn} \left(\varphi - \frac{\beta}{2} \right) . \tag{69*}$$

Il en résulte, par exemple, que les coordonnées x et y du point N $(\vartheta = \pi + \beta;\ \varphi = 0)$ s'expriment

$$\lim_{k=1} x_N = 2a(1 - \cos\beta); \qquad \lim_{k=1} y_N = 0 . (-\operatorname{sgn}\beta). \tag{70}$$

D'autre part, s'il s'agit des coordonnées du point M $\left(\vartheta = \beta \text{ ou } \vartheta = 2\pi + \beta, \text{ d'où } \varphi = \pm\frac{\pi}{2}\right)$,

on a:

$$(\lambda = \pm 1); \qquad \lim_{k=1} x_M = 0; \qquad \lim_{k=1} y_M = 0. \tag{71}$$

Cherchons maintenant les valeurs limites des coordonnées des extrémités A et B de notre arc de parabole; on a (form. 49, 52, et 60):

$$\varphi_A = \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}; \qquad \varphi_B = \frac{\beta}{4} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}; \qquad \cos\gamma = \mu\cos\frac{\beta}{2}. \tag{72}$$

Or, d'après la formule (40), μ tend vers l'unité en même temps que le module k; par suite, γ tend alors vers $\left|\frac{\beta}{2}\right|$, et il faut donc distinguer les trois cas suivants:

$$\left.\begin{array}{lll} \beta > 0; & \lim\limits_{k=1} \varphi_A = \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2}; & \lim\limits_{k=1} \varphi_B = \frac{\pi}{2}; \\ \beta = 0; & \lim\limits_{k=1} \varphi_A = -\frac{\pi}{2}; & \lim\limits_{k=1} \varphi_B = \frac{\pi}{2}; \\ \beta < 0; & \lim\limits_{k=1} \varphi_A = -\frac{\pi}{2}; & \lim\limits_{k=1} \varphi_B = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}. \end{array}\right\} \tag{73}$$

On en voit immédiatement que, dans le cas $\beta > 0$, les coordonnées de l'extrémité A $(\vartheta_A = 2\pi)$ sont (form. 69):

$$\beta > 0: \qquad \lim_{k=1} y_A = -0; \qquad \lim_{k=1} x_A = 4a. \tag{73*}$$

et, dans le cas $\beta < 0$, ce sont les coordonnées de l'extrémité B $(\vartheta_B = 0)$ qui s'expriment tout simplement:

$$\beta < 0: \qquad \lim_{k=1} y_B = +0; \qquad \lim_{k=1} x_B = 4a. \tag{73**}$$

Quant aux autres cas, mentionnés ci-dessus, leur analyse est plus compliquée, car alors l'amplitude φ varie en même temps que le module k. Mais on peut démontrer (voir *Th*) que, si $\beta \geqslant 0$, on a: $\lambda(\varphi_B) = 0$, et si $\beta \leqslant 0$ — $\lambda(\varphi_A) = 0$. Par suite:

$$\left.\begin{array}{lll} \beta > 0; & \lim\limits_{k=1} y_B = +0; & \lim\limits_{k=1} x_B = 2a(1 + \cos\beta); \\ \beta = 0: & \begin{cases} \lim\limits_{k=1} y_A = -0; & \lim\limits_{k=1} x_A = 4a; \\ \lim\limits_{k=1} y_B = +0; & \lim\limits_{k=1} x_B = 4a; \end{cases} & \\ \beta < 0; & \lim\limits_{k=1} y_A = -0; & \lim\limits_{k=1} x_A = 2a(1 + \cos\beta). \end{array}\right\} \tag{73***}$$

Ces formules avec celles (73* et 73**), trouvées précédemment, déterminent entièrement la position limite de la suite des arcs de parabole considérés, lorsque le module k tend vers l'unité.

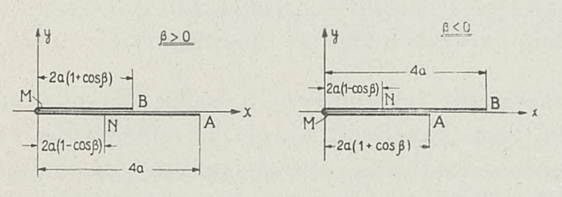


Fig. 14.

Nous avons mis en évidence tous les points caractéristiques en question sur les deux figures (14) ci-contre, correspondant l'une au cas $\beta > 0$ et l'autre au cas $\beta < 0$.

7. Cas général.

Pour mieux se rendre compte de la situation possible et de la configuration des arcs de parabole examinés, nous présentons ici une suite des exemples de ces arcs, tracés pour diverses valeurs de l'angle modulaire $\theta = \arcsin k$ et pour les valeurs de l'angle β

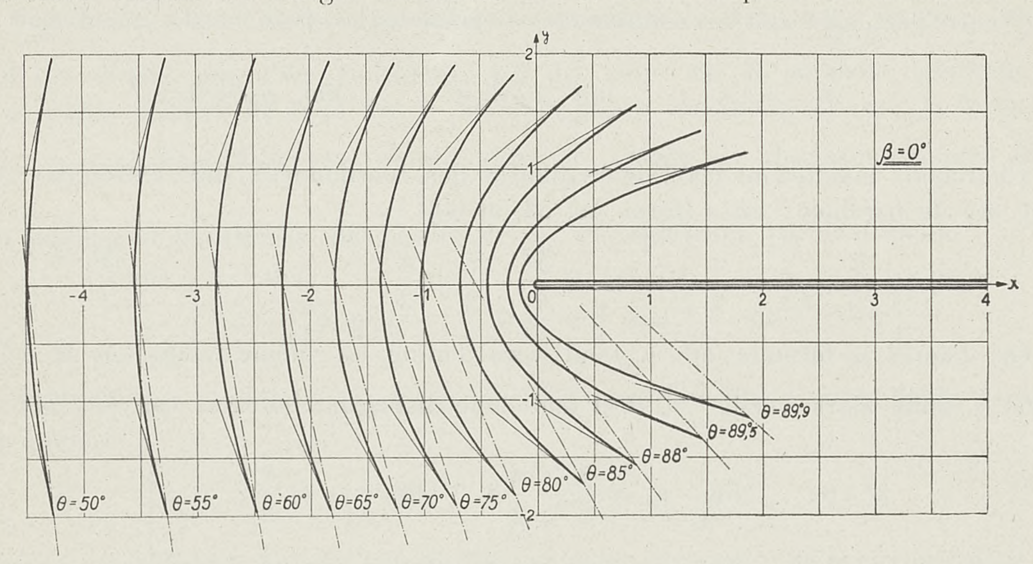


Fig. 15.

égales à 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°. Comme nous avons montré sur la page 20, on en peut obtenir immédiatement les arcs de parabole correspondant aux valeurs négatives de β.

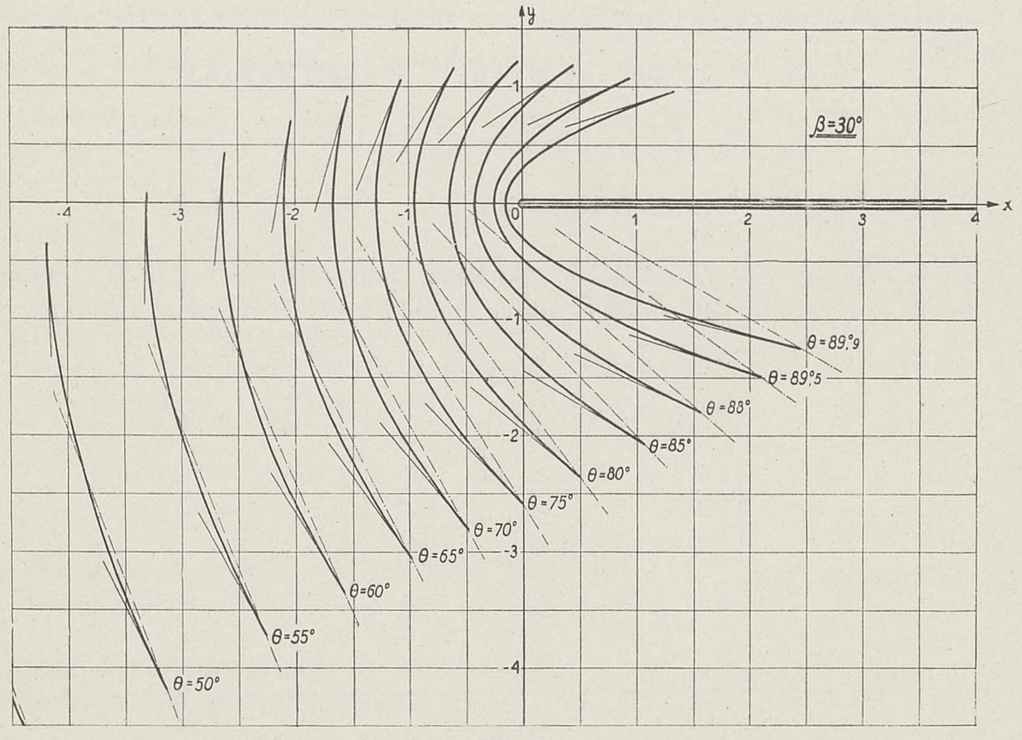


Fig. 16.

Les arcs de parabole en question sont tracés sur les figures 15 — 20. En désirant conserver leur position par rapport aux axes de coordonnées des x et y, nous avons été obligés d'omettre sur ces figures les arcs, correspondant aux petites valeurs de l'angle modulaire θ.

Nous avons marqué de plus sur ces figures: les tangentes aux points A et B de nos arcs de parabole, leur inclinaison vers l'axe des x étant déterminée par la form. (8): $\tau = \text{arc cotg}\, \xi$; et aussi les directions des *axes zéros* [1]), menés par les points A (dans les applications, nous considérerons toujours les points A comme les points de sortie du courant d'air).

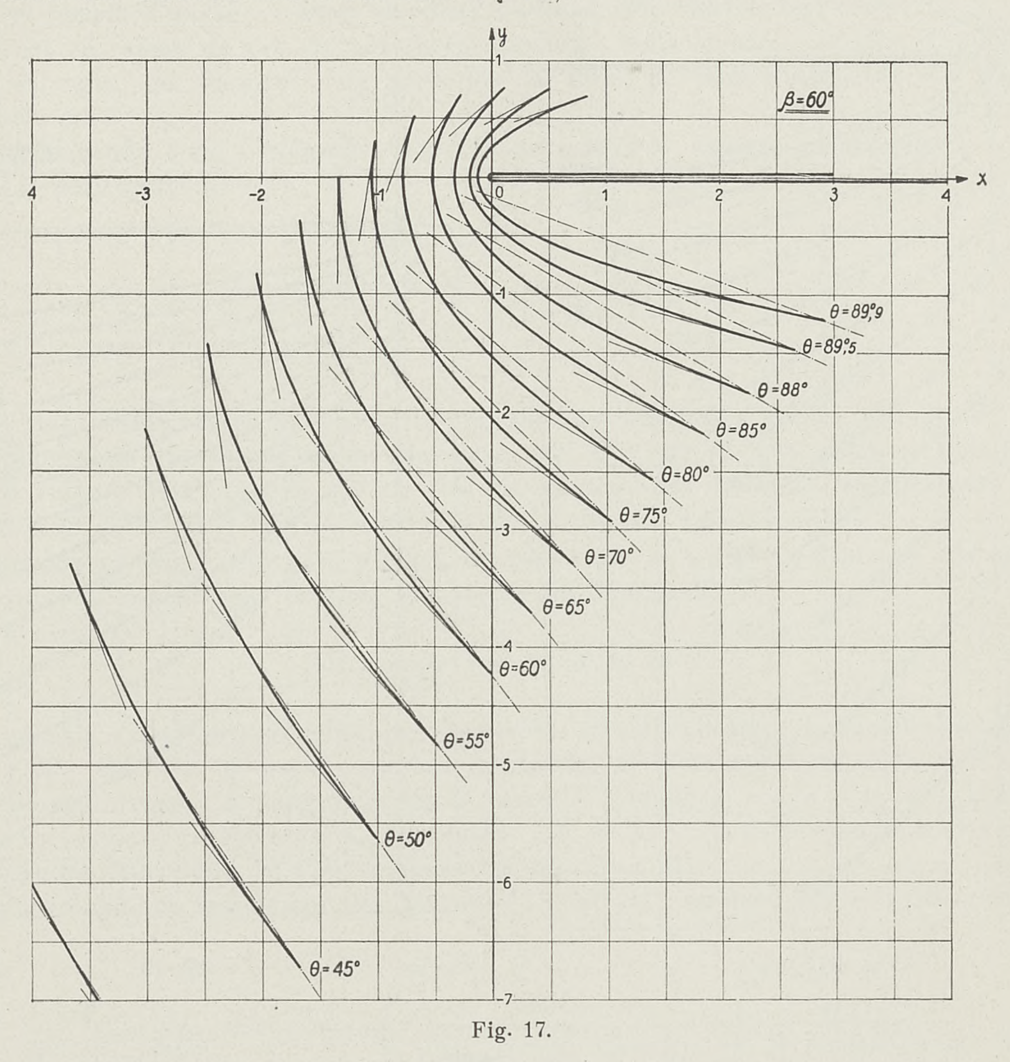


Fig. 17.

Pour pouvoir bien discerner ces deux genres des lignes auxiliaires, nous avons tracés les tangentes en traits pleins et les axes zéros comme lignes interrompues.

Jusqu'à présent, nous sommes occupés, en grande partie, de la correspondance des contours délimitant les régions transformées, cette correspondance faisant connaître déjà toutes les propriétés caractéristiques de la représentation conforme considérée. Mais, pour l'analyse de certaines questions, il peut arriver que cela ne suffit pas en tant qu'il se présente, par exemple, la nécessité de trouver l'ensemble des points correspondant à un ensemble quelconque des points, donnés à l'intérieur de la région que l'on vient de transformer. Dans ces conditions, le calcul devient plus compliqué, car il faut alors intégrer les expres-

---

[1]) Ce sont les directions de la vitesse du courant d'air correspondant à la portance nulle. Elles sont déterminées par les valeurs de la coordonnée polaire ϑ_A de ce point de la circonférence génératrice qui correspond au bord de sortie du profil envisagé.

sions, intervenant dans les formules fondamentales, entre des limites imaginaires. Or, même dans ces cas, comme nous allons montrer dans le paragraphe suivant, on peut utiliser avec profit les Tables de L e g e n d r e, en ramenant d'une manière convenable une intégrale elliptique prise entre des limites imaginaires aux intégrales, prises entre des limites réelles et plus petites — en valeur absolue — que l'unité.

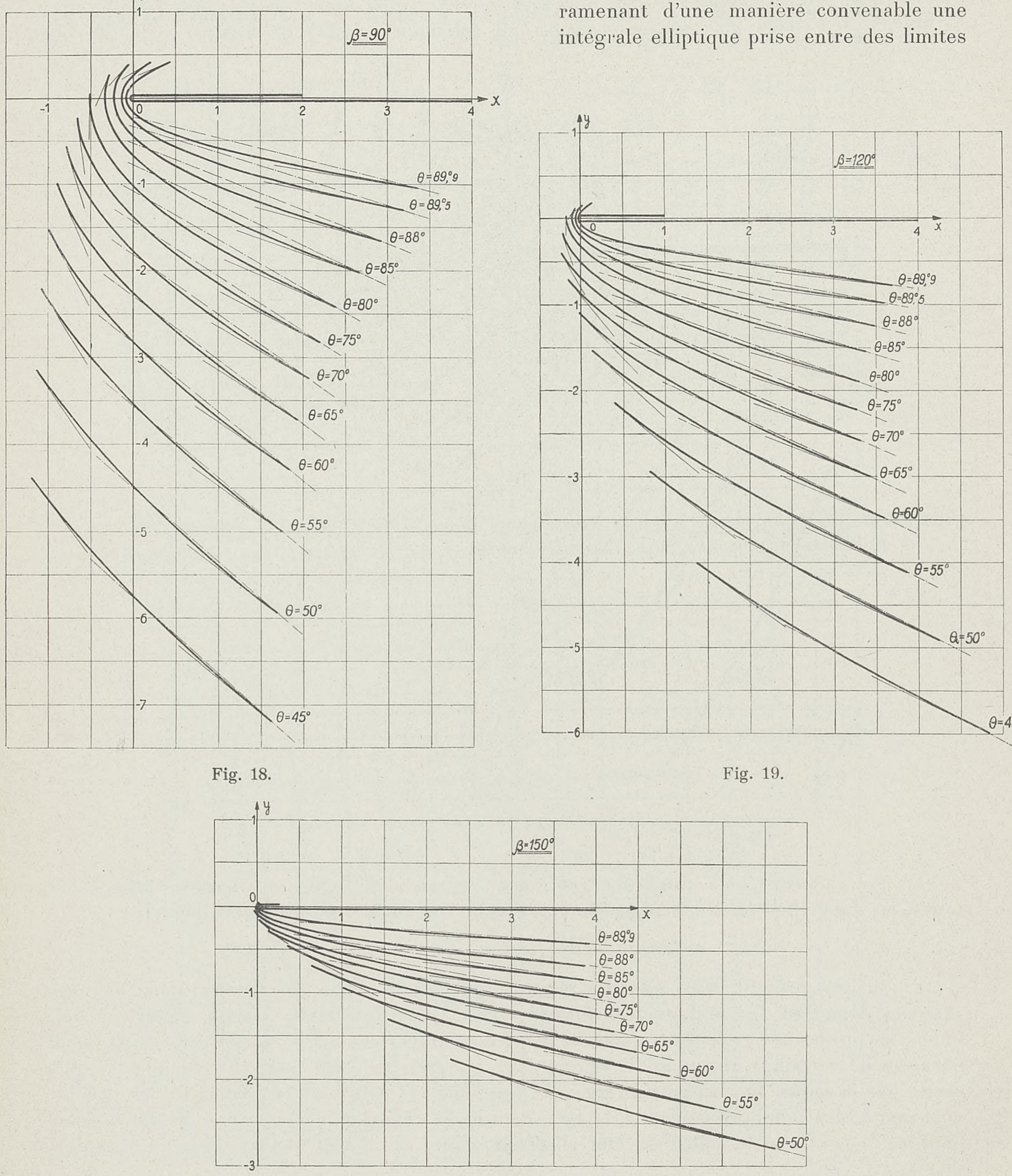


Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

8. Calcul des intégrales elliptiques, des deux premières espèces, prises entre des limites imaginaires.

Les relations dont il s'agit dans ce paragraphe ne sont pas nouvelles. On peut les trouver — il est vrai que sous une autre forme, peu claire, et dans un système des notations qui n'a été jamais d'usage — dans un vieux ouvrage de Schellbach[1]).

C'est en raison de ces circonstances que nous nous sommes décidés d'établir ici les résultats suivants, en donnant aux formules la forme la plus convenable aux besoins de notre problème.

Envisageons donc l'intégrale elliptique de première espèce, de module k réel, positif et plus petit que un :

$$w = u + iv = \int_0^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}}\cdot \tag{74}$$

Il suffit évidemment de n'y envisager que des intégrales prises le long des chemins d'intégration qui ne coupent en aucun lieu l'axe réel OU, car on peut alors en obtenir toutes les autres valeurs de l'intégrale définie (74) en ajoutant des multiples des périodes de cette intégrale, $4K$ et $2iK'$, à la valeur trouvée de w, ou à: $2K - w$.[2])

Supposons donc que le point W parcourt seulement le demi-plan supérieur, et considérons de plus l'inversion de l'intégrale (74):

$$W = \operatorname{sn}(w \mid k) = \operatorname{sn}(w \mid K,\ iK'). \tag{74*}$$

Comme on sait, cette fonction elliptique de Jacobi, de multiplicateur 1, admet deux périodes: $4K$ et $2iK'$. Elle fait la représentation conforme et biunivoque du demi-plan supérieur des W sur une région rectangulaire de la variable complexe $w = u + iv$ qui n'est qu'un quart du rectangle correspondant aux périodes: $4K$ et $2iK'$ (la correspondance des points W et w deviendra tout claire, si l'on compare les fig. 12 et 21).

En combinant maintenant les formules (74 et 74*), on peut écrire évidemment:

$$\int_0^{\operatorname{sn}(w \mid k)} \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} = u + iv = \int_0^{\operatorname{sn}(u \mid k)} \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} + \int_0^{\operatorname{sn}(iv \mid k)} \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}}\cdot \tag{75}$$

Conformément aux remarques précédentes (voir fig. 21), on a:

$$|u| \leqslant K, \qquad \text{d'où:} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sn}(u \mid k) \leqslant 1\,;$$

---

[1]) K. H. Schellbach. *Die Lehre von den Elliptischen Integralen und den Theta-Functionen* Berlin, Reimes, 1864, p. 154.

[2]) Observons que les notations que nous avons adoptées dans tout le travail sont celles de Jacobi et non pas d'Hermite. L'importante différence entre ces notations consiste, comme on sait, en ce que, dans les notations de Jacobi, les quantités K et K' sont fonctions l'une de l'autre:

$$K = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k^2 + k'^2 = 1, \qquad K' = K'(k) = K(k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

tandis que, dans les autres, K et K' sont des quantités indépendantes.

par conséquent, on peut poser:

$$\operatorname{sn}(u \mid k) = \sin \varphi^\star, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varphi^\star = \operatorname{am}(u \mid k), \tag{76}$$

où $\varphi^\star$ désigne une quantité réelle, comprise entre $-{}^1/_2\,\pi$ et $+{}^1/_2\,\pi$. De là, on conclut que la première des deux intégrales, figurant dans le dernier membre de l'égalité (75), s'exprime:

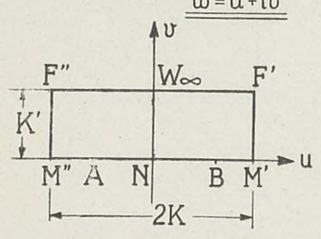


Fig. 21.

$$\int_0^{\operatorname{sn}(u \mid k)} \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} = \int_0^{\varphi^*} \frac{d\varphi^\star}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi^\star}} = F(\varphi^\star, k), \tag{77}$$

l'intégration étant effectuée le long de l'axe réel OU.

Quant à la deuxième intégrale, elle est prise entre les limites 0 et $\operatorname{sn}(iv \mid k)$. Or on peut écrire la limite supérieure, en mettant en évidence sa valeur purement imaginaire [1]:

$$\operatorname{sn}(iv \mid k) = i\,\frac{\operatorname{sn}(v \mid k')}{\operatorname{cn}(v \mid k')}, \tag{78}$$

où k' désigne le module complémentaire à k. Prenons dans cette deuxième intégrale, pour le chemin d'intégration, le segment de l'axe imaginaire, allant de 0 à $i\,\frac{\operatorname{sn}(v \mid k')}{\operatorname{cn}(v \mid k')}\cdot$ Si l'on effectue alors dans cette intégrale le changement de variable

$$t = \frac{-i\,W}{\sqrt{1-W^2}} = \frac{V}{\sqrt{1+V^2}},$$

en attribuant au radical sa valeur arithmétique, on obtiendra:

$$\int_0^{\operatorname{sn}(iv \mid k)} \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} = i \int_0^{\operatorname{sn}(v \mid k')} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = i\,F(\psi^\star, k'), \tag{79}$$

où l'on a posé, de même que précédemment:

$$\operatorname{sn}(v \mid k') = \sin\psi^\star; \qquad \psi^\star = \operatorname{am}(v \mid k'); \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi^\star \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot \tag{80}$$

Il vient donc finalement (form. 75, 77 et 79):

$$\int_0^W \frac{dW}{\sqrt{(1-W^2)(1-k^2W^2)}} = F(\varphi^\star, k) + i\,F(\psi^\star, k'), \tag{81}$$

et le problème se réduit ainsi à la détermination des amplitudes $\varphi^\star$ et $\psi^\star$.

[1]) P. Appell et E. Lacour, l. c., p. 161.

À cet effet, posons, pour faciliter les transformations ultérieures:

$$\left.\begin{aligned} W = U + i\,V &= \operatorname{sn}(u + iv \mid k) = \sin(\varphi + i\,\psi) = \sin\varphi \operatorname{Cosh}\psi + i\cos\varphi \operatorname{Sinh}\psi\,; \\ \sqrt{1 - W^2} &= \operatorname{cn}(u + iv \mid k) = \cos(\varphi + i\,\psi) = \cos\varphi \operatorname{Cosh}\psi - i\sin\varphi \operatorname{Sinh}\psi\,; \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

on peut évidemment admettre que les paramètres φ et ψ varient dans les intervalles suivants

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad -\infty < \psi < +\infty\,.$$

Inversement, il s'ensuit de la form. (82):

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{1}{2}\left[1 + U^2 + V^2 - \sqrt{(1 + U^2 + V^2)^2 - 4\,U^2}\right]; \\ \operatorname{Sinh}^2\psi &= \frac{1}{2}\left[-1 + U^2 + V^2 + \sqrt{(1 + U^2 + V^2)^2 - 4\,U^2}\right]; \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

dans ces formules, il faut attribuer aux radicaux leurs valeurs arithmétiques. De plus, comme il résulte de cette form. (82), il faut prendre φ positif ou négatif suivant que l'abscisse U est positive on négative, et de même: ψ est positif ou négatif suivant que l'ordonnée V est positive ou négative. C'est ainsi, par exemple, pour $V = 0$, on a:

$$\sin\varphi = U; \qquad \operatorname{Sinh}\psi = 0, \qquad \text{lorsque} \qquad |U| \leqslant 1,$$

et

$$\sin\varphi = 1; \qquad \operatorname{Sinh}\psi = \pm\sqrt{U^2 - 1}, \qquad \text{lorsque} \qquad U \geqslant 1.$$

Quant au signe double dans la dernière formule pour $\operatorname{Sinh}\psi$, observons qu'il faut prendre évidemment $(+)$, lorsqu'on s'approche de l'axe réel d'en haut, et le signe $(-)$, si l'on s'en approche d'en bas. Ainsi, en résumé, on peut dire que le plan des W est représenté sur la bande, délimitée par les deux parallèles: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. Remarquons encore qu'au premier quart du plan des W correspond une partie du premier quart du plan de la variable complexe $\varphi + i\varphi$, et de même, pour les autres quarts (fig. 22).

Fig. 22.

Prenons maintenant comme point de départ les formules d'addition pour $\operatorname{sn} w$ et $\operatorname{cn} w$, en y prenant de plus le soin de nous débarrasser des arguments imaginaires:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + iv \mid k) &= \frac{\operatorname{sn}(u \mid k)\operatorname{dn}(v \mid k') + i\operatorname{sn}(v \mid k')\operatorname{cn}(v \mid k')\operatorname{cn}(u \mid k)\operatorname{dn}(u \mid k)}{1 - \operatorname{sn}^2(v \mid k')\operatorname{dn}^2(u \mid k)}; \\ \operatorname{cn}(u + iv \mid k) &= \frac{\operatorname{cn}(u \mid k)\operatorname{cn}(v \mid k') - i\operatorname{sn}(u \mid k)\operatorname{sn}(v \mid k')\operatorname{dn}(u \mid k)\operatorname{dn}(v \mid k')}{1 - \operatorname{sn}^2(v \mid k')\operatorname{dn}^2(u \mid k)}; \end{aligned}\right\} \quad (84)$$

En tenant compte maintenant des relations (76) et (80) et de celles qui en résultent:

$$\cos\varphi^\star = \operatorname{cn}(u \mid k), \qquad \Delta\varphi^\star = +\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi^\star} = \operatorname{dn}(u \mid k),$$

$$\cos\psi^\star = \operatorname{cn}(v \mid k'), \qquad \Delta\psi^\star = +\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi^\star} = \operatorname{dn}(v \mid k'),$$

on déduira des équations (82) et (84) les quatres égalités suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\varphi\,\text{Cosh}\,\psi = \frac{1}{D}\sin\varphi^{\star}\,\Delta\psi^{\star}, \qquad &&\cos\varphi\,\text{Sinh}\,\psi = \frac{1}{D}\sin\varphi^{\star}\cos\psi^{\star}\cos\varphi^{\star}\,\Delta\varphi^{\star}, \\ &\cos\varphi\,\text{Cosh}\,\psi = \frac{1}{D}\cos\varphi^{\star}\cos\psi^{\star}, \qquad &&\sin\varphi\,\text{Sinh}\,\psi = \frac{1}{D}\sin\varphi^{\star}\,\sin\psi^{\star}\,\Delta\varphi^{\star}\,\Delta\psi^{\star}, \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

où l'on a désigné — pour abréger — par la lettre D le dénominateur commun:

$$D = 1 - \sin^2\psi^{\star}\,.\,(\Delta\varphi^{\star})^2\,. \tag{85*}$$

Les expressions $\Delta\varphi^{\star}$, $\Delta\psi^{\star}$ et D étant essentiellement positives, il résulte des relations (85) que le signe de l'amplitude $\varphi^{\star}$ est le même que celui du paramètre φ; tout de même, l'amplitude $\psi^{\star}$ et le paramètre ψ ont toujours les mêmes signes.

On peut maintenant — à l'aide des égalités (85) — exprimer les amplitudes $\varphi^{\star}$ et $\psi^{\star}$ en fonction des paramètres φ et ψ; on trouvera, après avoir effectué des transformations un peu pénibles (voir *Th*),

$$\sin\varphi^{\star} = \frac{1}{2k\,\text{Cosh}\,\psi}\left[\sqrt{(\text{Cosh}\,\psi + k\sin\varphi)^2 - k'^2\,\text{Sinh}^2\,\psi} - \sqrt{(\text{Cosh}\,\psi - k\sin\varphi)^2 - k'^2\,\text{Sinh}^2\,\psi}\right]$$

ou sous une forme quelquefois plus commode (86)

$$\sin\varphi^{\star} = \frac{1}{2k\,\text{Cosh}\,\psi}\left[\sqrt{(k\,\text{Cosh}\,\psi + \sin\varphi)^2 + k'^2\cos^2\varphi} - \sqrt{(k\,\text{Cosh}\,\psi - \sin\varphi)^2 + k'^2\cos^2\varphi}\right]$$

Dans ces formules, il faut attribuer aux radicaux exclusivement leurs valeurs arithmétiques. Quant au signe, adopté entre les radicaux, la raison de son choix résulte quand même de ce fait que l'on doit avoir $\varphi^{\star} = \varphi$, lorsque $\psi = 0$, c'est-à-dire lorsque W est réel et plus petit — en valeur absolue — que l'unité (voir la form. 82).

Tout pareillement, avec la même restriction concernant les radicaux, nous obtiendrons:

$$\sin\psi^{\star} = \frac{1}{2k'\,\text{Cosh}\,\psi}\left[\sqrt{(\text{Cosh}\,\psi + k'\,\text{Sinh}\,\psi)^2 - k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{(\text{Cosh}\,\varphi \quad k'\,\text{Sinh}\,\psi)^2 - k^2\sin^2\varphi}\right]$$

ou (87)

$$\sin\psi^{\star} = \frac{1}{2k'\,\text{Cosh}\,\psi}\left[\sqrt{(k'\,\text{Cosh}\,\psi + \text{Sinh}\,\psi)^2 + k^2\cos^2\varphi} - \sqrt{(k'\,\text{Cosh}\,\psi - \text{Sinh}\,\psi)^2 + k^2\cos^2\varphi}\right].$$

Ainsi, si l'on veut calculer l'intégrale (74), dont la limite supérieure est $W = U + iV$, on cherche d'abord à l'aide des formules (83) les valeurs correspondantes de $\sin\varphi$ et $\text{Sinh}\,\psi$, et ensuite les amplitudes $\varphi^{\star}$ et $\psi^{\star}$, déterminées par les formules (86) et (87). Enfin, ces amplitudes étant connues, on trouve la valeur de l'intégrale cherchée d'après la formule (81), en utilisant les Tables de Legendre. Rappelons cependant que ce sont seulement leurs valeurs principales.

Dans les cas qui nous intéressent au plus, on peut encore simplifier considérablement les calculs en exprimant les paramètres φ et ψ directement en fonction des coordonnées polaires des points situés dans le plan des Z, sans intermédiaire de la variable auxiliaire W. En effet, dans notre problème la variable W a la signification suivante (form. 56):

$$W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z}{a}e^{-i\beta} + \frac{a}{Z}e^{i\beta} + 2}\;;$$

en posant donc:

$$\frac{Z}{a} = e^{\rho + i\vartheta} , \tag{88}$$

nous obtenons:

$$W = \cos\frac{1}{2}(\vartheta - \beta - i\rho) \tag{89}$$

En combinant maintenant les deux formules, (82) et (89), on a:

$$\sin(\varphi + i\psi) = \sin\frac{1}{2}(\pi + \beta - \vartheta + i\rho) ,$$

d'où, en tenant compte des intervalles admis pour la variation des paramètres φ et ϑ:

$$\varphi = \frac{\pi + \beta - \vartheta}{2} ; \qquad \psi = \frac{1}{2}\rho . \tag{90}$$

On en voit que, lorsque le point mobile se trouve sur la circonférence génératrice même ($\rho = 0$), on a $\psi = 0$, et l'on revient alors sur la relation, obtenue précédemment (form. 60).

Traitons maintenant de la même manière l'intégrale elliptique de deuxième espèce:

$$\mathfrak{I} = \int_o^W \frac{W^2\, dW}{\sqrt{(1 - W^2)(1 - k^2 W^2)}} .$$

En y effectuant le changement de variable, défini précédemment (form. 74*):

$$W = \operatorname{sn}(w \mid k) = \operatorname{sn}(w \mid K, iK') ,$$

on a:

$$\mathfrak{I} = \int_o^{u+iv} \operatorname{sn}^2(u + iv)\, d(u + iv) = \int_o^u \operatorname{sn}^2 u\, du + i\int_o^v \operatorname{sn}^2(u + iv)\, dv , \tag{91}$$

où nous avons choisi, pour le chemin d'intégration, la ligne brisée, composée des deux segments: l'un formant une portion de l'axe réel, de 0 à u; et l'autre, parallèle à l'axe imaginaire, et allant du point u à $u + iv$.

Nous allons transformer la dernière intégrale, en nous servant de la formule d'addition pour $\operatorname{sn}(a + b)$, écrite comme suit[1]:

$$\operatorname{sn}(a + b) = \frac{\operatorname{sn}^2 b - \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b} .$$

En y posant: $b = u + iv$ et $a = -iv$, nous obtenons:

$$\operatorname{sn}^2(u + iv) = \operatorname{sn}^2(iv) - i \operatorname{sn} u \frac{d}{dv}\Big[\operatorname{sn}(u + iv) . \operatorname{sn}(iv)\Big] .$$

---

[1]) P. Appell et E. Lacour, l. c., p. 137, form. (8).

et par suite: $$\mathfrak{J} = \int_o^u \mathrm{sn}^2 u\, du + i \int_o^v \mathrm{sn}^2 (iv)\, dv + \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\,(u + iv)\, \mathrm{sn}\,(iv)\,.$$

Pour se débarrasser des arguments imaginaires, il faut appliquer la formule (78); en intégrant ensuite par parties, nous trouverons

$$\mathfrak{J} = \frac{i}{k^2}\left\{ v + \frac{\mathrm{sn}\,(v \mid k')}{\mathrm{cn}\,(v \mid k')} \left[W k^2\, \mathrm{sn}\,(u \mid k) - \mathrm{dn}\,(v \mid k') \right] - i k^2 \int_o^u \mathrm{sn}^2 (u \mid k)\, du - k'^2 \int_o^v \mathrm{sn}^2 (v \mid k')\, dv \right\}. \quad (92)$$

Introduisons maintenant les amplitudes $\varphi^\star$ et $\psi^\star$, définies précédemment (form. 76 et 80); on aura en premier lieu (voir la form. 79):

$$i v = \int_o^{\mathrm{sn}\,(i v \mid k)} \frac{dW}{\sqrt{(1 - W^2)\ (1 - k^2 W^2)}} = i F(\psi^\star, k') \ ;$$

d'autre part, en vérifiera facilement que

$$\int_o^u \mathrm{sn}^2 (u \mid k)\, du = \int_o^{\varphi^\star} \frac{\sin^2 \varphi^\star}{\Delta\, \varphi^\star}\, d\,\varphi^\star = \frac{1}{k^2}\left[F(\varphi^\star, k) - E(\varphi^\star, k) \right]$$

et

$$\int_o^v \mathrm{sn}^2 (v \mid k')\, dv = \int_o^{\psi^\star} \frac{\sin^2 \psi^\star}{\Delta\, \psi^\star}\, d\,\psi^\star = \frac{1}{k'^2}\left[F(\psi^\star, k') - E(\psi^\star, k') \right].$$

En portant toutes ces expressions dans la form (92), nous aurons finalement:

$$\int_o^W \frac{W^2\, dW}{\sqrt{(1 - W^2)\ (1 - k^2 W^2)}} = \frac{1}{k^2}\left[F(\varphi^\star, k) - E(\varphi^\star, k) + i E(\psi^\star, k') + i (W k^2 \sin \varphi^\star - \Delta\, \psi^\star)\, \mathrm{tg}\, \psi^\star \right], \quad (93)$$

où les amplitudes $\varphi^\star$ et $\psi^\star$ sont déterminées par les formules (86), (87) et (83) — cette dernière formule se réduit à (90), lorsqu'il a lieu la relation (56). Quant au signe des amplitudes, c'est l'amplitude $\varphi^\star$ qui s'accorde en signe avec la partie réelle U de la variable complexe W, et l'amplitude $\psi^\star$ — avec sa partie imaginaire V.

Dans cette formule (93), un cas limite, savoir $\psi^\star = \pm \frac{\pi}{2}$, exige un examen spécial, car alors l'expression

$$\Psi = (W k^2 \sin \varphi^\star - \Delta\, \psi^\star)\, \mathrm{tg}\, \psi^\star \quad (94)$$

devient indéfinie comme $0 \,.\, \infty$. En effet pour que $\psi^\star = \pm \frac{\pi}{2}$, il faut et il suffit (voir formules 85 — 87) que $\varphi = \frac{\pi}{2}\, \mathrm{sgn}\, \varphi^\star$. Mais alors, étant $\Delta \psi^\star = k$ et $D = k^2 \sin^2 \varphi^\star$, il est: $\sin\, \varphi\, \mathrm{Cosh}\, \psi = \frac{1}{k \sin \varphi^\star}$, c'est-à-dire $\mathrm{Cosh}\, \psi = \frac{1}{k \mid \sin \varphi^\star \mid} \geqslant \frac{1}{k}$ et par suite (form. 94 et 82):

$$\Psi = (\sin \varphi\, \mathrm{Cosh}\, \psi \,.\, k^2 \sin \varphi^\star - \Delta\, \psi^\star)\, \mathrm{tg}\, \psi^\star = (k - k) \,.\, \infty\,.$$

Pour trouver la limite vers laquelle tend cette expression Ψ, posons:

$$|\varphi| = \frac{\pi}{2} - \delta \qquad \text{et de plus} \qquad k^2 \operatorname{Cosh}^2 \psi - 1 = r^2 > 0,$$

où r et δ désignent les nombres entiers; dans la suite, nous considérerons r comme une constante et δ comme une quantité infiniment petite tendant vers zéro. Dans ces conditions, en négligeant tous les termes infiniment petits d'ordre δ^2 et supérieurs, on obtient à l'aide des formules (86 — 87):

$$\sin \varphi^\star = \frac{\operatorname{sgn} \varphi}{k \operatorname{Cosh} \psi}; \qquad \operatorname{sgn} \psi^\star = \operatorname{sgn} \psi; \qquad \cos \psi^\star = \frac{k\delta}{r}; \qquad \Delta \psi^\star = k;$$

d'autre part, d'après la form. (82): $W = \operatorname{sgn} \varphi \cdot \operatorname{Cosh} \psi + i \delta \operatorname{Sinh} \psi$. De cette façon, l'expression cherchée tend pour $\delta = 0$ vers la valeur finie:

$$\Psi = \left[(\operatorname{sgn} \varphi \operatorname{Cosh} \psi + i\delta \operatorname{Sinh} \psi) k^2 \frac{\operatorname{sgn} \varphi}{k \operatorname{Cosh} \psi} - k \right] \frac{r \operatorname{sgn} \psi}{k\delta} = i \operatorname{sgn} \varphi \left| \operatorname{Tgh} \psi \sqrt{k^2 \operatorname{Cosh}^2 \psi - 1} \right|, \qquad (94^\star)$$

sous la condition, bien entendu, que le paramètre ψ même ait la valeur finie; dans le cas contraire, l'expression Ψ, et par cela-même l'intégrale (93), tend vers l'infini (c'est — comme on sait — la différence bien essentielle entre l'intégrale elliptique de deuxième espèce et l'intégrale de première espèce qui est partout finie).

C'est ainsi, si l'on pose p. ex.: $\varphi = + \frac{\pi}{2}$ et $\psi > + \operatorname{Arg} \operatorname{Cosh} \frac{1}{k}$ (cela signifie que le chemin d'intégration évite les points critiques d'en haut et que la variable W est réelle et plus grande que $\frac{1}{k}$), on aura $W = \operatorname{Cosh} \psi$, et la formule fondamentale prendra la forme:

$$\int_{0}^{W} \frac{W^2 \, dW}{\sqrt{(1 - W^2)(1 - k^2 W^2)}} = \frac{1}{k^2} \left[F\left(\arcsin \frac{1}{kW}, k \right) - E\left(\arcsin \frac{1}{kW}, k \right) - \right.$$
$$W > \frac{1}{k}$$
$$\left. - \frac{1}{W} \sqrt{(W^2 - 1)(k^2 W^2 - 1)} + i E' \right]. \qquad (93^\star)$$

De la même manière, on pourrait démontrer que, pour $W = \frac{1}{k}$, il vient de la formule générale (93) la relation bien connue:

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{W^2 \, dW}{\sqrt{(1 - W^2)(1 - k^2 W^2)}} = \frac{1}{k^2} (K - E + i E'). \qquad (93^{\star\star})$$

CHAPITRE III.

Applications aérodynamiques.

1 Profils d'ailes sustentatrices.

Nous allons appliquer maintenant les résultats des chapitres précédents à l'examen des profils d'ailes sustentatrices.

Comme nous avons déjà signalé dans l'introduction, il faut à cet effet de considérer les arcs de paraboles comme „squelettes" d'une famille des profils d'aviation.

Envisageons donc, dans le plan de la variable complexe Z, une circonférence Q' de rayon a' plus grand que le rayon a de la circonférence primitive Q ($|Z| = a$). Soit de plus cette circonférence Q' tangente à Q en ce point qui correspond à la pointe A de notre arc AB de parabole (fig. 23).

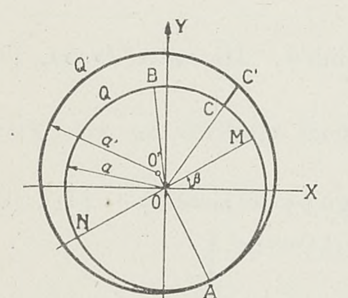


Fig. 23.

La fonction de transformation $z = f(Z)$, trouvée et étudiée dans les chapitres précédents, transforme cette circonférence Q' en un profil fermé P' (sans points doubles) entourant notre arc AB. Les circonférences Q et Q' étant tangentes en A, le profil P' forme au point correspondant A la *pointe effilée*, y ayant une tangente commune avec l'arc de parabole AB; au contraire, dans sa partie antérieure, le profil P' — se distinguant complétement de son squelette — est arrondi (fig. 24).

On peut évidemment trouver les coordonnées des points de ce profil P' à l'aide des formules générales, obtenues précédemment (chapitre II, paragraphe 8), ces formules déterminant la position de chaque point dans le plan des z, dès que l'on fixe la position du point correspondant dans le plan des Z.

D'ailleurs, dans un nombre des cas spéciaux, lorsque les profils en question diffèrent peu des squelettes mêmes, on peut remplacer ces formules générales par des expressions approchées, donnant pourtant une approximation suffisante.

Considérons à cet effet, l'équation du cercle Q' (fig. 23), écrite comme suit:

$$|Z + \delta_0 a e^{i\vartheta_A}| = (1 + \delta_0) a = a' , \tag{95}$$

où δ_0 désigne une valeur positive, déterminant l'augmentation du rayon a' de la circonférence Q' par rapport au rayon a de la circonférence Q ($0 0' = \delta_0 a$).

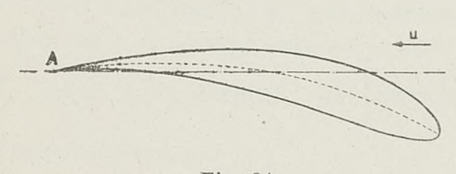


Fig. 24.

Nous supposerons, dans la suite, que δ_0 soit une petite fraction. Désignons encore par $(1 + \delta) a$ la valeur du rayon vecteur d'un point arbitraire C', situé sur la circonférence Q'; on aura donc généralement pour les points de cette circonférence:

$$\frac{Z}{a} = e^{\rho + i\vartheta} = (1 + \delta) e^{i\vartheta} . \tag{96}$$

En substituant cette expression dans la form. (95), nous obtenons:

$$|(1 + \delta) e^{i\vartheta} + \delta_0 e^{i\vartheta_A}| = 1 + \delta_0 , \text{ d'où: } \delta = -\left[1 + \delta_0 \cos(\vartheta - \vartheta_A)\right] + \sqrt{1 + 2\delta_0 + \delta_0^2 \cos^2(\vartheta - \vartheta_A)} ;$$

δ est, conformément à sa définition, compris entre 0 et $2\delta_0$.

Pour déterminer maintenant la position des points du profil cherché, il suffit évidemment de trouver les formules pour leurs coordonnées paraboliques ξ et η, les coor-

données rectilignes x et y étant liées aux coordonnées paraboliques par les formules données précédemment (form. 6).

Or, en ne gardant que la première puissance du paramètre δ_0, on peut obtenir — à l'aide des formules, déduites dans le chapitre précédent (*cf. Th.*) — les expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\xi &\cong \frac{2K}{\pi}\left[E(\varphi, k) - \frac{E}{K} F(\varphi, k) - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\vartheta - \beta}{2}}\right];\\ \eta &\cong 1 + \delta_0 \frac{K}{\pi} \frac{1 - \cos(\vartheta - \vartheta_A)}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\vartheta - \beta}{2}}}\left\{1 - \frac{E}{K} - \frac{k^2}{2}\left[1 + \frac{\cos\left(\vartheta - \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

Comme on voit, la première de ces formules ne dépend guère du paramètre δ_0; elle est identique à la formule (59). On en conclut que les points, correspondant aux deux points d'intersection du même rayon vecteur avec les circonférences Q et Q', ont dans le plan des ζ la même abscisse ξ. Cela était d'ailleurs évident d'avance. En effet, nous avons négligé tous les termes contenant comme facteur δ_0 au carré et aux puissances plus élevées. Par là, nous avons regardé comme rectiligne le chemin qui correspond au passage CC' (fig. 23) le long d'un rayon vecteur, de la circonférence Q à celle Q'. Mais alors, la conformité de la représentation nécessite que la translation en question (dans le plan des ζ) soit normale au segment AB, ce que montrent justement les formules (97).

Remarquons encore que pour la pointe A $(\vartheta = \vartheta_A)$ on a, comme il fallait prévoir: $\eta = 1$.

On trouve ci-dessus un exemple du profil (fig. 24), ainsi calculé. Les paramètres β, θ et δ_0, correspondant à ce profil, ont les valeurs suivantes:

$$\beta = 30^0; \qquad \theta = 60^0 \qquad \text{et} \qquad \delta_0 = 0{,}1.$$

Sur la fig. 24, on trouve non seulement le profil en question, mais encore l'arc de parabole (en traits interrompus) constituant le squelette de ce profil.

2. Détermination du coefficient du moment c_m, dans la position zéro du profil.

Nous bornons l'analyse des propriétés aérodynamiques des profils en arc de parabole à l'examen du *couple des forces aérodynamiques* agissant sur le profil situé dans la *position zéro*. Le moment M_0 de ce couple joue, comme on sait, un rôle important dans certains problèmes de l'aviation[1].

Or, comme nous apprend l'aérodynamique, il est très aisé de trouver la valeur du moment M_0 du couple en question dès que l'on connaît le développement de la fonction de transformation en série de Laurent (form. 2). Il faut seulement faire tourner les axes des coordonnées de sorte que dans le plan des Z le point A, correspondant au bord de sortie du profil, vienne sur la portion négative de l'axe des X. Alors la partie

---

[1]) On trouvera une étude approfondie de toutes les questions, relatives aux profils pour lesquels ce moment M_0 est nul, dans le travail de M. Neumark, *Les profils à centre de poussée fixe,* imprimé dans le fasc. III de ce recueil. (Voir en particulier l'Introduction).

imaginaire C_1'' du coefficient du terme $\frac{1}{Z}$ de ce développement détermine le moment cherché par la formule[1]

$$M_0 = -2\pi\sigma u^2 C_1'' , \tag{98}$$

où σ — désigne la densité, et u — la vitesse du courant d'air, dirigée dans le sens opposé à celui de *l'axe zéro* (c'est-à-dire, l'axe Fx' de la fig. 25) — on peut aussi considérer le vecteur u comme la vitesse de translation du profil envisagé, mais alors ce vecteur doit être dirigé dans le sens même de l'axe réel Fx'. Il est à remarquer encore que le moment M_0 est regardé ici, suivant l'usage des laboratoires aérodynamiques, comme positif quand il tend à faire „piquer" le profil; par conséquent, en admettant la disposition indiquée sur la figure 25, ce moment sera positif lorsqu'il tendra à faire tourner le profil dans le sens de la rotation des aiguilles d'une montre.

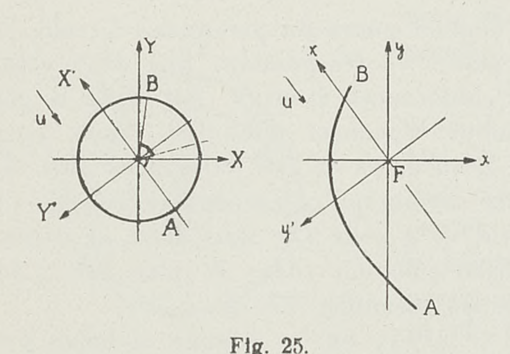


Fig. 25.

Dans les applications aérodynamiques, on met en usage le coefficient du moment, c_m, qui est lié au moment M_0 par la relation

$$c_m = \frac{M_0}{{}^1/_2\, \sigma u^2 l^2}$$

où l désigne la longueur de la corde du profil considéré. De là et de la form. (98), on tire:

$$c_m = -\frac{4\pi C_1''}{l^2} \tag{99}$$

Il est commode d'introduire la quantité abstraite:

$$C = -\frac{C_1''}{a^2} \tag{100}$$

Alors, la form. (99) prend la forme:

$$c_m = 4\pi \left(\frac{a}{l}\right)^2 C . \tag{99*}$$

Pour déterminer ce coefficient, il faut donc trouver les premiers termes du développement de la fonction de transformation $z = f(Z)$ en série de Laurent. Sans donner ici tous les calculs, assez longs (voir à cet égard *Th.*, p. 101 — 103), nous nous bornons à indiquer le résultat final:

$$\frac{z}{a} = \frac{Z}{a} + 2\left(\mu - \frac{2}{k^2}\cdot\frac{E}{K}e^{i\beta}\right) + \left[\mu^2 + 2\left(\mu^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1+k'^2}{k^2}\mu - \frac{1}{3}\right)e^{i\beta} + \right.$$
$$\left. + \left(\mu^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1+k'^2}{k^2}\mu + \frac{1}{3}\right)e^{2i\beta}\right]\frac{a}{Z} + \cdots \tag{101}$$

où nous avons introduit de nouveau la quantité $\mu(k)$, définie et calculée à la fin du chapitre I (*voir* la form. 40 et la fig. 10). La fonction $z = f(Z)$ étant régulière dans tout l'extérieur du

[1]) S. Neumark, l c., *Introduction* — on y trouve la form. XIV: $M = 2\pi\sigma u^2 a^2 B_1$; or, dans notre formule (98), le symbole C_1'' désigne la partie imaginaire, toute entière, du coefficient du terme $\frac{1}{Z}$, tandis qu'ici B_1 est égal à cette partie imaginaire divisée par le carré du rayon a du cercle générateur — ainsi toute différence entre ces deux formes de la formule en question se réduit à la relation: $B_1 = \frac{C_1''}{a^2}$, et à la différence de signe du moment.

cercle générateur $|Z| = a$, il est évident que le développement ci-dessus y est partout convergent.

Pour déterminer maintenant la valeur du coefficient cherché, il faut encore — comme nous avons mentionné précédemment — faire tourner les axes de coordonnées dans le plan des Z de sorte que le point A de la circonférence $|Z| = a$, correspondant au bord de sortie du profil, se trouve sur la partie négative de l'axe réel; il en résulte que l'angle de rotation doit être égal à $\vartheta_A - \pi$. Du même angle, il faut tourner aussi les axes de coordonnés dans le plan des z (fig. 25) pour que la fonction de transformation $z = f(Z)$ devienne l'identité au point à l'infini. Portons donc dans la form. (101) les substitutions suivantes:

$$Z = Z' \, e^{i(\vartheta_A - \pi)}; \qquad z = z' \, e^{i(\vartheta_A - \pi)};$$

il viendra alors:

$$z' = Z' + 2a\left(\mu - \frac{2}{k^2} \cdot \frac{E}{K} e^{i\beta}\right) e^{i(\pi - \vartheta_A)} + \left[\mu^2 + 2\left(\mu^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + k'^2}{k^2} \mu - \frac{1}{3}\right) e^{i\beta} + \right.$$

$$\left. + \left(\mu^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + k'^2}{k^2} \mu + \frac{1}{3}\right) e^{2i\beta}\right] \frac{a^2}{Z'} e^{2i(\pi - \vartheta_A)} + \cdots \qquad (102)$$

où (form. 52):

$$\pi - {}_A = \gamma - \frac{\beta}{2} - \pi.$$

Il en résulte l'expression suivante pour le calcul de la partie imaginaire C_1'' du coefficient du terme $\frac{1}{Z'}$:

$$C_1'' = \left[\mu^2 \sin(2\gamma - \beta) + 2\left(\mu^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + k'^2}{k^2} \mu - \frac{1}{3}\right) \sin 2\gamma + \right.$$

$$\left. + \left(\mu^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + k'^2}{k^2} \mu + \frac{1}{3}\right) \sin(2\gamma + \beta)\right] a^2.$$

Cette expression peut être mise encore sous une forme plus commode au calcul numérique:

$$C = -\frac{C_1''}{a^2} = \mu' \sin\beta \cos 2\gamma + \left[1 + (\mu' - 2\mu^2)(1 + \cos\beta)\right] \sin 2\gamma, \qquad (103)$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\mu' = \frac{1}{3}\left(4 \, \frac{1 + k'^2}{k^2} \mu - 1\right). \qquad (104)$$

On peut aussi — si l'on préfère — exprimer le coefficient C sans intermédiaire de l'angle auxiliaire γ, défini par la relation (49): $\cos\gamma = \mu \cos\frac{\beta}{2}$; il viendra:

$$C = -\mu' \sin\beta \left[1 - \mu^2 (1 + \cos\beta)\right] +$$

$$+ 2\mu \cos\frac{\beta}{2} \left[1 + (\mu' - 2\mu^2)(1 + \cos\beta)\right] \cdot \left|\sqrt{1 - \frac{1}{2}\mu^2 (1 + \cos\beta)}\right|. \qquad (103^*)$$

À l'aide de cette formule, on a calculé et tracé une suite des courbes présentant, pour diverses valeurs du paramètre β, le coefficient C en fonction de l'angle modulaire $\theta = \arcsin k$. Les courbes, se rapportant aux valeurs positives de β, sont réunies sur la fig. 26_1, et celles relatives à $\beta < 0$ — sur la fig. 26_2. On en voit que l'allure de toutes ces courbes est bien semblable. Elles sont situées en général au-dessus de l'axe des abscisses. Elles sortent, toutes, de l'origine de coordonnées et obtiennent un seul extremum (maximum) pour la valeur de l'angle modulaire θ assez voisine de $\frac{\pi}{2}$. Ensuite, les courbes correspondant aux cas $\beta > 0$ vont en décroissant jusqu'à $C = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, tandis que celles se rapportant aux cas $\beta < 0$ aboutissent pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ aux points dont les ordonnées sont égales à $C = \sin 2\beta$.

En nous appuyant sur ces résultats, nous pouvons maintenant facilement examiner la variation du coefficient du moment c_m.

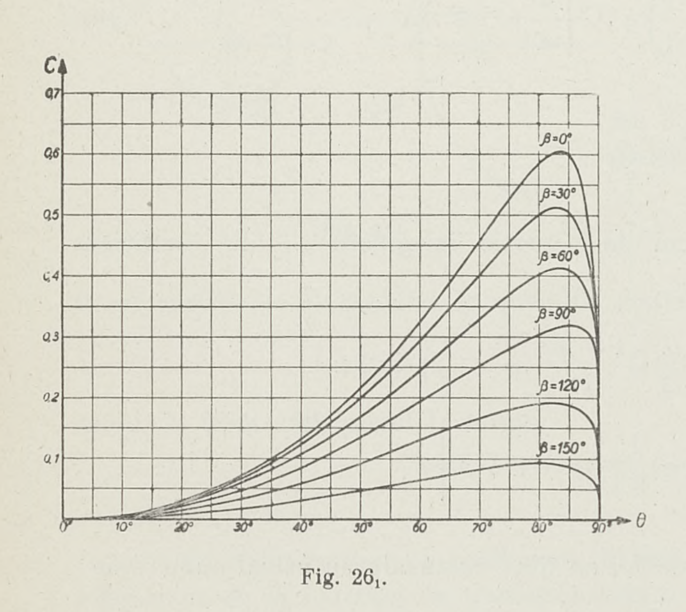


Fig. 26_1.

Fig. 26_2.

Dans le nouveau système des axes, l'axe réel des x' a déjà la direction de *l'axe zéro* (p. 25). Par conséquent, si nous supposons de plus que la vitesse du courant, contournant le profil considéré, soit dirigée dans le sens des x' négatifs (fig. 25 — la pointe A constitue alors le bord de sortie), nous pourrons appliquer au calcul du coefficient c_m la form. (99*): $c_m = 4\pi\left(\frac{a}{l}\right)^2 C$. La valeur du quotient $\frac{a}{l}$ qui figure dans cette formule peut être déterminée par le simple mesurage de la longueur l de la corde de l'arc de parabole considéré, tracé sur une des figures 15 — 20 (on y a admis le rayon a du cercle générateur comme l'unité).

Remarquons encore que, quand il s'agit des applications pratiques, ce sont seulement les arcs assez légèrement courbés qui offrent de l'intérêt, c'est-à-dire — dans le cas étudié ici — ce seront les arcs de parabole se rapportant aux valeurs de l'angle modulaire θ, pas trop voisines de $\frac{\pi}{2}$. C'est pourquoi, dans la suite, nous laissons de côté les arcs excessivement courbés $\left(\theta \text{ près de } \frac{\pi}{2}\right)$.

Nous donnons ci-dessous un aperçu de la variation du coefficient c_m, pourtant non pas en fonction de l'angle modulaire θ qui ne possède pas une signification géométrique simple, mais en fonction du rapport Λ:

$$\Lambda = \frac{f}{l}, \tag{105}$$

où f désigne la flèche de l'arc AB de parabole, et l — la longueur de sa corde. On trouve sur la fig. 27 les diagrammes des fonctions $C(\Lambda)$ et sur la fig. 27* — les diagrammes des fonctions $c_m(\Lambda)$; tous les deux diagrammes sont tracés exclusivement pour les petites et médiocres valeurs du paramètre Λ.

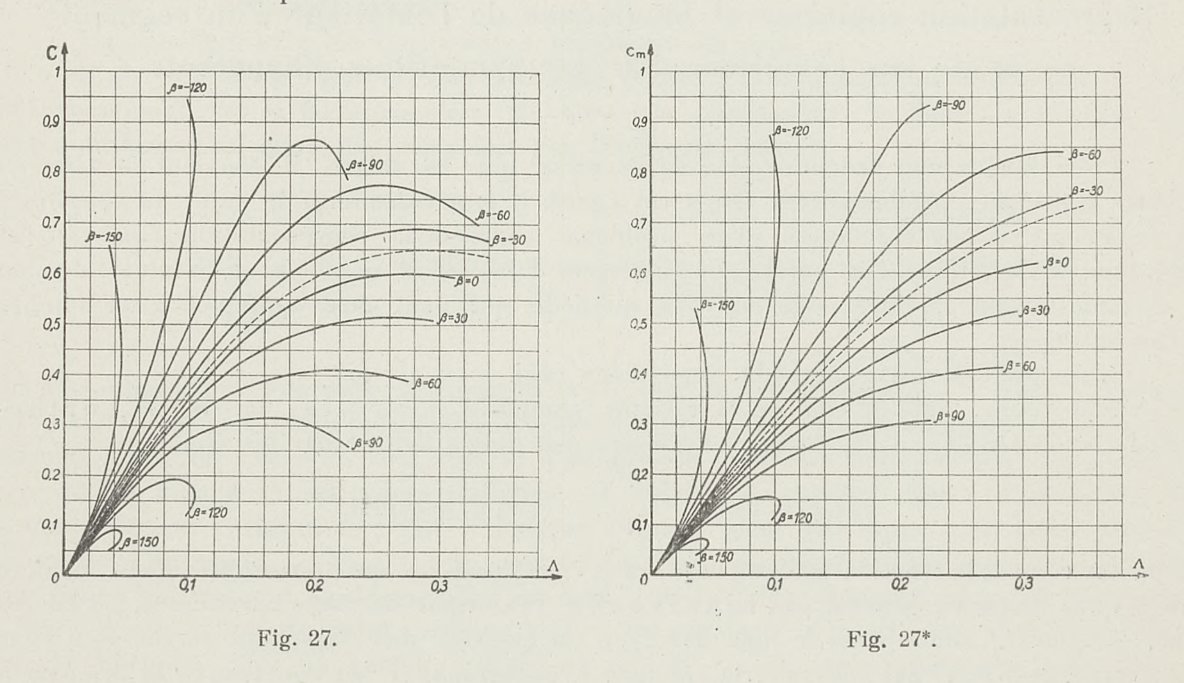


Fig. 27. Fig. 27*.

Pour disposer d'un exemple comparatif, nous avons tracé sur ces figures encore deux courbes (en lignes pointillées) se rapportant aux squelettes des profils de Joukowski, c'est-à-dire aux arcs de cercles.

Un coup d'oeil sur les figures ci-contre nous montre cette propriété simple et caractéristique des profils d'aviation, ayant les squelettes en arc de parabole[1]: pour la même valeur du paramètre Λ, *le coefficient* c_m *diminue à fur et à mesure que le paramètre* β *varie en augmentant, des valeurs négatives aux valeurs positives*; et notamment, si $\beta \geqslant 0$, le coefficient c_m est plus petit que celui relatif aux profils de Joukowski; dans le cas contraire, il peut être plus grand que celui-ci, surtout, si β, étant négatif, diffère assez de zéro.

Remarquons encore qu'il faut combiner ces résultats avec le fait suivant. Désignons— pour l'exprimer plus facilement — par le symbole S le point de notre arc de parabole, où la courbure atteint sont maximum. Si le sommet de la parabole se trouve sur l'arc en question, AB, c'est ce sommet qui constitue le point S. Dans le cas contraire, le point S coïncide avec une des extrémités de l'arc AB. Or, comme on voit sur les figures 15—20, dans le cas $\beta > 0$ (c'est-à-dire pour des valeurs de c_m comparativement petites), le point S est

---

[1]) Il faut ici remarquer ce qui suit. Toutes les valeurs trouvées du coefficient c_m se rapportent aux arcs AB mêmes, mais on en peut facilement obtenir les valeurs de ce coefficient correspondant aux profils P', pour lesquels ces arcs de paraboles forment des squelettes — il suffit à cet effet de multiplier la valeur considérée de c_m par le carré du rapport suivant: la longueur de la corde de l'arc AB divisée par la longueur de la corde du profil P'.

situé dans la partie antérieure de l'arc AB — tandis que, dans le cas contraire, $\beta < 0$, ce point se trouve dans la partie postérieure.

En généralisant cette observation, on pourrait en conclure que, pour diminuer la valeur du coefficient c_m, il faut chercher les profils moins incurvés à l'arrière qu'à l'avant.

CHAPITRE IV.

Représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un segment de droite sur l'extérieur d'un arc symétrique d'hyperbole.

Pour donner une première idée de l'analyse qui va suivre, il convient de faire ici quelques remarques préliminaires. Or, à cet égard, il faut considérer le sujet du chapitre I non seulement comme la solution d'un problème concret—la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un arc de parabole—mais plutôt comme un exemple devant expliquer une nouvelle méthode qui peut être appliquée à un nombre de cas analogues.

L'essentiel de cette méthode consiste en ceci.

Soit donné, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, un réseau, orthogonale et isométrique, de deux systèmes des lignes définis par les équations:

$$\xi(x, y) = \text{Const.} \qquad \eta(x, y) = \text{Const.}$$

Par là, on connaît la fonction analytique $\zeta = \xi + i\eta = f(x + iy)$ qui transforme d'une manière conforme (mais en général pas biunivoque) l'extérieur des arcs curvilignes $\xi = \text{Const.}$ (resp. $\eta = \text{Const.}$) situés dans le plan des z en un système des segments parallèles à l'axe des η (resp. ξ) — voir, par exemple, le chapitre I, paragraphe 1, où l'on trouve la discussion détaillée des coordonnées paraboliques: $z = {}^1/_2\, p\, \zeta^2$.

Or, dans un nombre de cas, on peut ensuite réussir, en se guidant par le principe de Schwarz mentionné plus haut (p. 5), à faire la représentation conforme de ce système des segments parallèles à l'axe des η sur un système convenable des segments parallèles à l'axe des ξ; et de suite, en prenant l'inversion de la fonction analytique $\zeta = f(z)$, également sur un certain arc curviligne: $\eta = \text{Const.}$ Par cela-même, on parvient déjà à la représentation, conforme et biunivoque, de l'extérieur de l'arc curviligne $\xi = C_1$ sur l'extérieur d'un certain arc curviligne $\eta = C_2$.

Dans ces conditions, le problème de la représentation conforme de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur d'un arc curviligne donné $\xi = C_1$ se ramène à la recherche de la représentation de l'extérieur de ce cercle sur l'extérieur d'un arc $\eta = C_2$ appartenant à une tout autre famille des courbes, ce qui peut présenter, dans des cas étendus, un problème plus facile à resoudre, ou même — un problème déjà resolu, si notamment $\eta = C_2$ est un segment de droite ou un arc de cercle. On se trouve, par exemple, en présence de ce priemier cas, si les courbes $\xi = C_1$ possèdent un axe commun de symétrie, et si l'on y prenne un arc symétrique par rapport à cet axe. C'est justement de cette façon que nous allons transformer, dans ce chapitre et dans celui qui va suivre, les arcs symétriques des coniques.

Ajoutons enfin que très souvent on peut assez facilement généraliser la solution aussi pour les arcs asymétriques[1]).

[1]) C'est ainsi, p. ex., que nous avons trouvé, dans le par. 3 du chap. I, la représentation des arcs asymétriques de paraboles. Quant aux arcs asymétriques d'hyperboles et d'ellipses, nous remettons leur étude à un travail prochain.

1. Coordonnées elliptiques.

Dans ce qui va suivre, les coordonnées elliptiques jouerons un rôle important. Il convient donc d'établir ici leurs propriétés essentielles.

Envisageons deux plans: celui de la variable complexe $z = x + iy$ et celui de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$, et soit fixée entre les points de ces deux plans la correspondance définie par la formule:

$$z = -c \cdot \cos\zeta \,, \qquad \begin{cases} x = -c \operatorname{Cosh}\eta \cos\xi \,, \\ y = +c \operatorname{Sinh}\eta \sin\xi \,, \end{cases} \tag{1}$$

où c désigne une constante positive.

On appelle ξ et η les coordonnées elliptiques du point z.

Il s'ensuit de la form. (1) que à chaque point ζ correspond un seul point z, mais pas inversement, car la transformation (1) n'est pas biunivoque, la fonction inverse à (1) étant multiforme; en effet, elle s'exprime par l'intégrale définie:

$$\zeta = \arccos\frac{z}{c} = \frac{\pi}{2} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}}\,, \tag{2}$$

dans l'hypothèse que l'on part de l'origine $z = 0$ avec la valeur initiale $+c$ pour le radical. La fonction sous le signe d'intégration n'ayant d'autres points singuliers que les deux points critiques $z = c$ et $z = -c$, tout chemin d'intégration peut être remplacé par une suite de *lacets* décrits autour de ces points critiques, et suivis du chemin direct, c'est-à-dire du segment joignant l'origine au point z lorsque celui-ci n'est pas situé sur l'axe réel, en dehors de l'intervalle $(-c, +c)$; si c'est le cas, on peut prendre pour chemin direct une ligne située entièrement au-dessus de l'axe réel. Or la valeur de cette intégrale (2) le long de lacet, décrit autour du point critique $z = c$, est égale à $+\pi$ ou $-\pi$, suivant que l'on part de l'origine avec la valeur initiale du radical $+c$ ou $-c$; tandis que cette valeur, correspondant au lacet décrit autour de l'autre point critique $z = -c$, est égale respectivement à $-\pi$ et $+\pi$[1]).

Ainsi, si nous désignerons par $\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$ la valeur de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}}$, prise suivant le chemin direct avec la valeur initiale $+c$ pour le radical $\sqrt{c^2 - z^2}$, toutes les autres valeurs de cette intégrale s'exprimeront par

$$\zeta^* + 2\varkappa_1\pi \qquad \text{ou} \qquad -\zeta^* + (2\varkappa_2 - 1)\pi\,,$$

où $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ désignent des nombres entiers quelconques. On obtient la première expression, s'il faut introduire un nombre pair de lacets, et la seconde, s'il en faut un nombre impair. Il s'ensuit qu'à chaque point z correspond, dans le plan de la variable complexe ζ, deux suites des points (voir sur la fig. 28 les points A etc.) dont les coordonnées sont déterminées par les expressions:

$$\frac{\pi}{2} + \zeta^* + 2\varkappa_1\pi \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{2} - \zeta^* + (2\varkappa_2 - 1)\pi = -\left(\frac{\pi}{2} + \zeta^*\right) + 2\varkappa_2\pi\,. \tag{3}$$

Par suite, tous ces points sont situés sur les deux parallèles à l'axe réel dont la distance est égale à 2η; la distance entre les deux points successifs, situés sur une des deux

[1]) Voir, par exemple: Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. II, p. 135—137.

parallèles est évidemment 2π. Il s'ensuit encore des expressions (3) que tous deux parmi ces points, l'un se trouvant au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe réel, sont symétriques par rapport à un des points de l'axe réel dont les coordonnées sont de la forme: $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc. À ces derniers points correspondent, dans le plan des z, alternativement les deux points critiques $z = -c$ et $z = +c$ formant les foyers, F_1 et F_2, communs aux deux familles des courbes isothermes: celle des ellipses homofocales $(\eta = \pm \eta_0)$:

$$\left(\frac{x}{c \operatorname{Cosh} \eta_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \operatorname{Sinh} \eta_0}\right)^2 = 1 ; \tag{4}$$

et celle des hyperboles homofocales $(\xi = \pm \xi_0 + \varkappa \pi)$:

$$\left(\frac{x}{c \cos \xi_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{c \sin \xi_0}\right)^2 = 1 . \tag{5}$$

Aux premières courbes, les ellipses, correspondent donc dans le plan des ζ les deux suites des segments (de la longueur 2π); leurs extrémités se touchent d'ailleurs, de sorte qu'ils forment les deux parallèles: $\eta = +\eta_0$ et $\eta = -\eta_0$ (fig. 28); d'autre part, à chaque branche d'une des hyperboles y correspondent une infinité des droites parallèles à l'axe imaginaire: $\xi = \xi_0 + 2\varkappa\pi$ et $\xi = -\xi_0 + 2\varkappa\pi$. Remarquons encore que, si l'on suppose que le point z décrit la branche envisagée de l'hyperbole, dans un sens déterminé, les points correspondants du plan des ζ décrivent les droites indiquées, alternativement d'en haut en bas et inversement.

On peut évidemment rendre biunivoque la transformation en question, si l'on prend le soin de remplacer le plan simple des z par la surface convenable de Riemann relative à la fonction (2). Cette surface se compose d'une infinité de feuillets; leurs points de ramification, en nombre infini, sont situés au-dessus de l'un et de l'autre point critique $z = \pm c$. D'ailleurs, pour ne pas s'engager dans les considérations topologiques concernant cette surface, tout inutiles pour ce qui va suivre, nous pouvons imaginer que ces feuillets sont coupés le long des deux courbes, $F_1 L_1$ et $F_2 L_2$, allant des points critiques vers l'infini. Ces coupures, menées d'ailleurs d'une manière quelconque, ne doivent pas cependant se croiser entre elles. À ces coupures correspondent évidemment, dans le plan des ζ, les courbes qui passent par les points correspondant aux points critiques, et qui sont de plus symétriques par rapport à ces points.

2. Représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un segment sur l'extérieur d'un arc symétrique d'hyperbole.

Passons maintenant au problème posé. Envisageons donc, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, sur une des hyperboles dont les foyers se trouvent aux points F_1 et F_2, un arc quelconque symétrique AB. D'après ce qui a été expliqué plus haut, la fonction (1) transforme cet arc AB en deux systèmes des segments AB, égaux et parallèles à l'axe des η. Leur configuration est marquée sur la fig. 28.

Il est commode de considérer dans le plan de la variable complexe ζ la bande comprise entre deux parallèles, $\xi = 0$ et $\xi = \pi$, comme *principale*. Cette bande n'est autre chose que la représentation conforme et biunivoque du plan des z, coupé le long des deux parties de l'axe des x allant des points critiques $-c$ et $+c$ vers l'infini. Cette transformation est définie par la formule (2), dans l'hypothèse bien entendu que l'on y attribue au radical $\sqrt{c^2 - z^2}$ cette détermination qui devient égale à $+c$ au point $z = 0$. Les autres bandes du plan des ζ, nous serviront d'ailleurs pour faciliter la recherche des représentations intermédiaires.

Conformément aux remarques générales, faites au début de ce chapitre, nous allons transformer maintenant le système de ces segments de droites en un systèmes des segments MN, situés — dans un nouvel plan de la variable complexe $\tau = \rho + i\sigma$ — sur l'axe

réel, un après l'autre, symétriquement par rapport aux points $\tau = \varkappa \nu$ (voir la fig. 29). Il est clair (cf. ce qui a été dit sur la page 5) que la dérivée de la fonction de transfor-

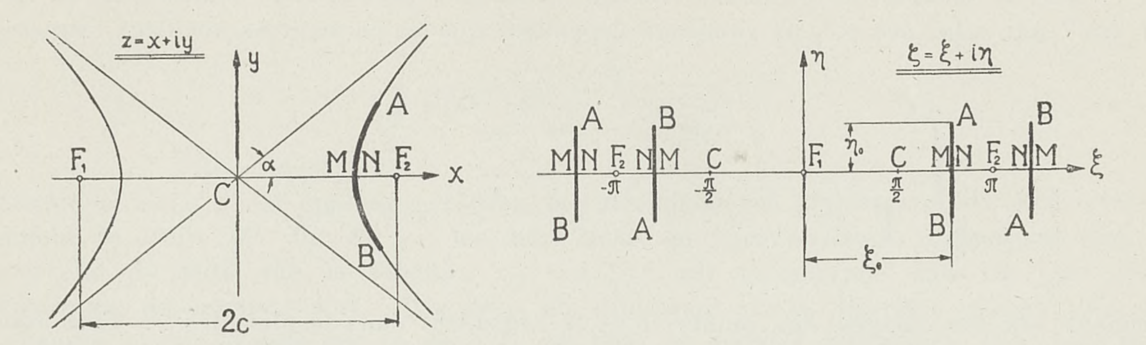


Fig. 28.

mation cherchée $\zeta = \zeta(\tau)$ doit posséder un point critique (un pôle de l'ordre $1/2$) à chaque point M et N, et un zéro simple à chaque point (A, B) qui correspond à une des extrémités, A ou B, des segments du plan des ζ. Nous l'écrirons donc sous la forme:

$$\zeta = C_1 \int_0^\tau \frac{(\rho_0 - \tau)(\rho_0 + \tau) \prod\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\rho_0 - \tau}{2\varkappa\nu}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\rho_0 + \tau}{2\varkappa\nu}\right)^2\right]}{\sqrt{(\rho_2 + \tau)(\rho_1 + \tau)(\rho_1 - \tau)(\rho_2 - \tau) \prod\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\rho_2 + \tau}{2\varkappa\nu}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\rho_1 + \tau}{2\varkappa\nu}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\rho_1 - \tau}{2\varkappa\nu}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\rho_2 - \nu}{2\varkappa\nu}\right)^2\right]}} d\tau =$$

$$= C_1 \int_0^\tau \frac{\sin \pi \dfrac{\rho_0 - \tau}{2\nu} \sin \pi \dfrac{\rho_0 + \tau}{2\nu}}{\sqrt{\sin \pi \dfrac{\rho_2 + \tau}{2\nu} \sin \pi \dfrac{\rho_1 + \tau}{2\nu} \sin \pi \dfrac{\rho_1 - \tau}{2\nu} \sin \pi \dfrac{\rho_2 - \tau}{2\nu}}} d\tau =$$

$$= C_1 \int_0^\tau \frac{\left(\cos \dfrac{\pi}{\nu} \tau - \cos \dfrac{\pi}{\nu} \rho_0\right)}{\sqrt{\left(\cos \dfrac{\pi}{\nu} \tau - \cos \dfrac{\pi}{\nu} \rho_1\right)\left(\cos \dfrac{\pi}{\nu} \tau - \cos \dfrac{\pi}{\nu} \rho_2\right)}} d\tau. \tag{6}$$

La signification des notations introduites est expliquée sur la fig. 29. Le coefficient C_1, réel et positif, reste provisoirement indéterminé. Quant à la détermination du

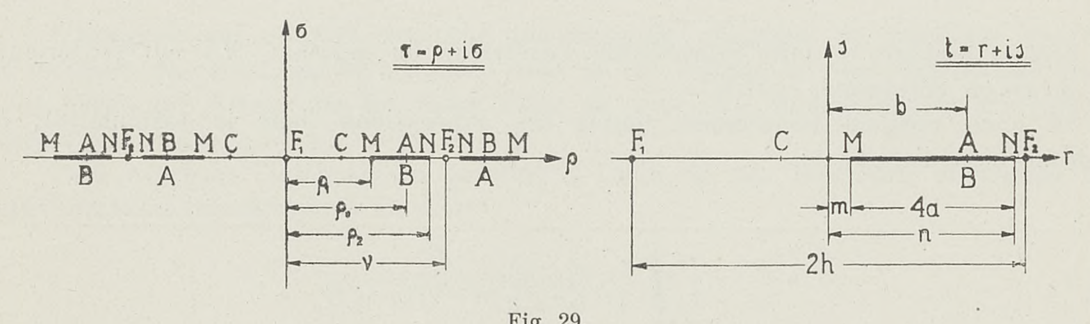


Fig 29.

radical, nous choisissons celle qui est positive à l'origine de coordonnées $\tau = 0$. Ajoutons encore qu'il faut considérer, dans le plan des τ, les segments de droites MN comme coupures qui ne doivent pas être traversées par le chemin d'intégration.

On peut facilement s'assurer — d'une manière analogue à celle dont nous avons tiré parti dans le chapitre I lorsqu'il s'agissait de la représentation conforme d'un arc de parabole — que la fonction (6) détermine véritablement la représentation biunivoque de notre plan des ζ sur celui des τ, à la condition cependant que les paramètres vérifient l'équation:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\cos\frac{\pi}{\nu}\tau - \cos\frac{\pi}{\nu}\rho_0}{\sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{\nu}\rho_1 - \cos\frac{\pi}{\nu}\tau\right)\left(\cos\frac{\pi}{\nu}\tau - \cos\frac{\pi}{\nu}\rho_2\right)}}\, d\tau = 0. \qquad (7)$$

exprimant que les images des points M et N coïncident dans le plan des ζ. Cela assure déjà que, dans le cas étudié, la représentation conforme sera biunivoque.

En laissant, pour le moment, cette condition sous sa forme implicite, nous revenons encore plus tard sur la relation explicite qui en résulte.

Maintenant, pour transformer ce plan des τ contenant une infinité des images de notre arc d'hyperbole AB, en un nouveau plan ne contenant qu'un seul image, segment de droite MN, il suffit d'introduire la simple représentation conforme, analogue à (1):

$$t = -h\cos\frac{\pi}{\nu}\tau, \qquad (8)$$

où $t = r + is$ désigne la nouvelle variable complexe et, $-h$ et $+h$, sont les abscisses des images des foyers F_1 et F_2; nous y désignons de plus par m et n les abscisses des points M et N, et par b — l'abscisse commune des images des pointes A et B de l'arc d'hyperbole (voir la fig. 29). Remarquons encore que dans le plan des t, de même que dans les autres, le segment de droite MN étant regardé comme une coupure, le point A se trouve au-dessus et B — au-dessous de cette coupure. Ainsi, on a:

$$m = -h\cos\frac{\pi}{\nu}\rho_1; \qquad b = -h\cos\frac{\pi}{\nu}\rho_0; \qquad n = -h\cos\frac{\pi}{\nu}\rho_2. \qquad (9)$$

Enfin, étant souvent commode d'introduire comme la région primitive, qui va être transformée ensuite en la région donnée, l'extérieur d'un cercle, nous posons:

$$n - m = 4a, \qquad (9^*)$$

ce qui permet toujours de faire représenter l'extérieur du segment MN sur l'extérieur du cercle, du rayon déterminé, égal à a.

Si nous portons maintenant toutes ces expressions dans la formule (6), nous obtiendrons immédiatement:

$$\zeta = C_1\frac{\nu}{\pi}\int_{-h}^{t}\frac{(b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)}}, \qquad (10)$$

où il faut attribuer au radical la valeur initiale positive, si l'on commence l'intégration le long de l'axe réel, dans le sens des quantités croissantes.

Cette formule, avec la formule (1), et sous la condition admise (7), qui peut être exprimée à l'aide de la nouvelle variable t comme il suit:

$$\int_m^n \frac{(b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)}} = 0\,, \tag{7*}$$

déterminent déjà, d'une manière continue, la correspondance biunivoque des deux côtés du segment de droite MN (fig. 29) sur les deux côtés de l'arc envisagé d'hyperbole (fig. 28). Observons de plus que la fonction $z(t) = z[\zeta(t)]$ est holomorphe dans le plan des t, à l'extérieur du segment MN. Par suite, en s'appuyant sur le théoreme, signalé déjà dans le chapitre I (voir la note sur la page 7), on peut en déduire facilement que dans le fait cette fonction $z(t)$ détermine la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur du segment de droite sur l'extérieur de l'arc d'hyperbole considéré.

Ce qu'il reste encore à établir, ce sont les relations liant les paramètres introduits et mettant en évidence les paramètres primitifs. Nous parviendrons à cela en indiquant simultanément le moyen le plus pratique de calcul des expressions en question.

Mais d'abord, remarquons qu'il s'ensuit des formules (2) et (10):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt} = \sqrt{c^2 - z^2} \cdot C_1 \frac{\nu}{\pi} \cdot \frac{b-t}{\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)}}, \quad \text{d'où:} \quad \lim_{\substack{t=\infty \\ z=\infty}} \left(\frac{dz}{dt}\right) = C_1 \frac{\nu}{\pi} \cdot \frac{z}{t}\,.$$

Comme nous admettons toujours l'hypothèse, $\lim\limits_{\substack{t=\infty \\ z=\infty}} \left(\frac{dz}{dt}\right) = 1$, il en résulte qu'il doit être:

$$C_1 \frac{\nu}{\pi} = 1\,. \tag{11}$$

Ce n'est pas évidemment la condition suffisante — celle-ci, nous l'établirons un peu plus loin — mais, c'est en tout cas la condition nécessaire. Par suite, nous pouvons écrire définitivement les formules qui déterminent la représentation cherchée comme il suit:

$$z = -c\,.\,\cos\zeta\,; \qquad \zeta = \int_{-h}^{t} \frac{(b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)}}\,. \tag{12}$$

L'intégrale qui y figure constitue une intégrale elliptique de troisième espèce. La seule méthode de calcul, qui se présente dans ce cas comme la plus convenable, est celle qui est basée sur l'usage des fonctions *Thêta* de Jacobi, admettant des développements en séries très convergentes.

Pour exprimer l'intégrale en question à l'aide de ces fonctions, effectuons d'abord la transformation homografique suivante

$$T = -\frac{h-m}{h+m} \cdot \frac{t+h}{t-h}\,; \tag{13}$$

et désignons par k^2 l'expression

$$k^2 = \frac{h+m}{h-m} \cdot \frac{h-n}{h+n}\,; \qquad \text{d'où:} \qquad k'^2 = \frac{2h(n-m)}{(h-m)(h+n)}\,. \tag{14}$$

Il s'ensuit que, dans le nouveau plan des T, l'image du foyer F_1 se trouve à l'origine de coordonnées; celui du point M vient au point $T = +1$, et N — au point $T = \frac{1}{k^2}$; simultanément, l'image de l'autre foyer F_2 s'enfuit à l'infini $T = \infty$, tandis que l'image de l'infini ($t = \infty$) vient sur la partie négative de l'axe réel au point Λ dont l'abscisse est égale à

$$T_\Lambda = -\frac{h-m}{h+m}. \tag{15}$$

Or en imaginant que le plan des T est coupé le long de l'axe des quantités négatives, dès l'origine jusqu'à l'infini, passons au demi-plan auxiliaire de la variable complexe

$$W = \sqrt{T}, \tag{16}$$

en prenant cette détermination du radical dont la partie réelle est positive (fig. 30).

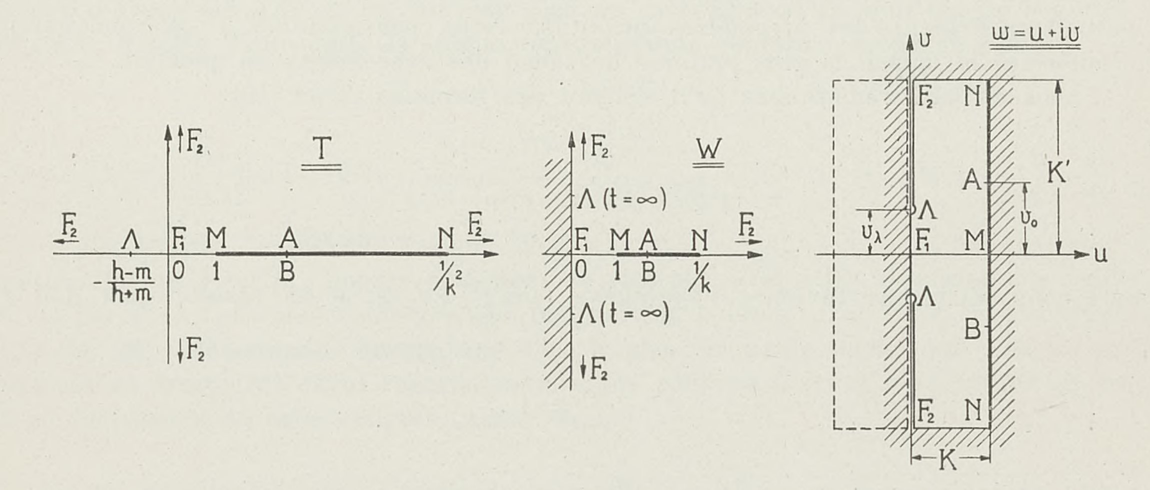


Fig. 30.

Ensuite, transformons ce demi-plan en un rectangle à l'aide d'une fonction elliptique. À cet effet, nous posons, en remarquant que les expressions (14) sont positives et plus petites que l'unité :

$$\operatorname{sn}(w \mid K, iK') = \operatorname{sn}(w \mid k) = W = \sqrt{-\frac{h-m}{h+m} \cdot \frac{t+h}{t-h}}, \tag{17}$$

où la fonction sn admet pour les deux périodes les quantités : $4K(k)$ et $2iK'(k) = 2iK(k')$, définies précédemment (voir la note 2 sur la page 27). Inversement, nous déduirons de la formule (17) :

$$t = h \frac{T - \frac{h-m}{h+m}}{T + \frac{h-m}{h+m}} = h \frac{\operatorname{sn}^2 w - \frac{h-m}{h+m}}{\operatorname{sn}^2 w + \frac{h-m}{h+m}}. \quad ^{1)} \tag{18}$$

[1]) Lorsque, dans la notation des fonctions elliptiques, le module n'est pas explicitement nommé, il faut conclure que c'est le module k (c'est-à-dire le couple des périodes $4K$ et $2iK'$) qui sert à la construction des fonctions elliptiques considérées.

En calculant w d'après la formule

$$w = F(\arcsin W, k) \quad , \tag{17*}$$

il est utile, lorsque W a une valeur complexe, de recourir aux formules présentées dans le chapitre II (§ 8). Remarquons, de plus, que parmi les rectangles qui correspondent au demi-plan des W, nous choisissons celui dont les sommets ont les coordonnées: iK', $K+iK'$, $K-iK'$, $-iK'$, en le nommant le *demi-rectangle fondamental.*

Quant à la correspondance des bords des régions transformées , elle s'ensuit immédiatement des propriétés de la fonction sn. Cette correspondance est bien mise en évidence sur la figure 30, où nous avons désigné en outre par v_λ la valeur absolue des ordonnées des deux points Λ correspondant à $t=\infty$; et par v_0 — celle des images des extrémités A et B de l'arc d'hyperbole.

Or, il résulte de la form. (17):

$$\operatorname{sn}(i v_\lambda \mid k) = i\sqrt{\frac{h-m}{h+m}}\,; \tag{19}$$

nous pouvons donc écrire la formule (18) sous la forme:

$$t = h\,\frac{\operatorname{sn}^2 w + \operatorname{sn}^2(iv_\lambda)}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2(iv_\lambda)} \quad ; \tag{18*}$$

ensuite, d'après la relation connue

$$\operatorname{sn}(i v \mid k) = i\,\frac{\operatorname{sn}(v \mid k')}{\operatorname{cn}(v \mid k')} \quad ,$$

on tire de la form. (19):

$$\operatorname{sn}(v_\lambda \mid k') = +\sqrt{\frac{h-m}{2h}}\;; \quad \operatorname{cn}(v_\lambda \mid k') = +\sqrt{\frac{h+m}{2h}}\;; \quad \operatorname{dn}(v_\lambda \mid k') = +\sqrt{\frac{h+m}{h+n}}. \tag{19*}$$

Introduisons encore l'amplitude χ de $(v_\lambda \mid k')$:

$$\chi = \operatorname{am}(v_\lambda \mid k'), \quad \text{c. à. d.:} \quad \sin\chi = \operatorname{sn}(v_\lambda \mid k') = +\sqrt{\frac{h-m}{2h}}\,, \quad 0<\chi<\frac{\pi}{2}, \tag{20}$$

d'où inversement

$$v_\lambda = \int_o^\chi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = F(\chi, k'). \tag{20*}$$

On peut considérer les quantités k, χ et a comme les seuls paramètres indépendants, tous les autres pouvant être exprimés à l'aide de ces trois. D'abord, v_λ est défini par la formule (20*); ensuite, quant à m, n et h, en tenant compte des trois relations:

$$\frac{h-m}{2h} = \sin^2\chi\,, \qquad \frac{2h}{h-m}\cdot\frac{n-m}{h+n} = k'^2\,, \qquad n-m = 4a\,,$$

on a

$$k = 8a\,\frac{1-k'^2\sin^2\chi}{k'^2\sin^2 2\chi}\,; \qquad m = 8a\,\frac{1-k'^2\sin^2\chi}{k'^2\sin^2 2\chi}\cos 2\chi\,; \qquad n = 8a\,\frac{1-(1+k^2)\sin^2\chi}{k'^2\sin^2 2\chi}. \tag{21}$$

Avant de chercher des expressions pour les deux autres paramètres, b et c, transformons l'intégrale (12) à l'aide des formules (18*) et (19). Tout d'abord, en tenant compte de la détermination admise du radical, on trouve;

$$\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)} = 4\,i\,h^2\,\frac{\operatorname{sn}^3(i\,v_\lambda)}{\operatorname{cn}(i\,v_\lambda)\operatorname{dn}(i\,v_\lambda)}\cdot\frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\left[\operatorname{sn}^2 w-\operatorname{sn}^2(iv_\lambda)\right]^2};$$

ensuite:

$$dt = -4\,h\operatorname{sn}^2(i\,v_\lambda)\,\frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{\left[\operatorname{sn}^2 w-\operatorname{sn}^2(iv_\lambda)\right]^2}\,dw\ ;$$

en portant ces expressions dans la formule (12), on trouve:

$$\zeta = i\left(\frac{b}{h}-1\right)\frac{\operatorname{cn}(iv_\lambda)\operatorname{dn}(iv_\lambda)}{\operatorname{sn}(iv_\lambda)}\,w - 2\,i\int_o^w \frac{\operatorname{sn}(iv_\lambda)\operatorname{cn}(iv_\lambda)\operatorname{dn}(iv_\lambda)}{\operatorname{sn}^2 w-\operatorname{sn}^2(iv_\lambda)}\,d\,w\ . \tag{22}$$

Mais, on a [1]):

$$\int_o^w \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 w-\operatorname{sn}^2 a}\,dw = w\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{H}(a-w)}{\mathrm{H}(a+w)}; \tag{23}$$

par suite

$$\zeta = i\left[\left(\frac{b}{h}-1\right)\frac{\operatorname{cn}(iv_\lambda)\operatorname{dn}(iv_\lambda)}{\operatorname{sn}(iv_\lambda)} - 2\,\frac{\Theta'(iv_\lambda)}{\Theta(iv_\lambda)}\right]w - i\ln\frac{\mathrm{H}(iv_\lambda-w)}{\mathrm{H}(iv_\lambda+w)}\ , \tag{22*}$$

où il faut prendre zéro comme la valeur initiale du logarithme pour $w=0$, et ensuite la prolonger par continuation.

Les fonctions de Jacobi, $\Theta(w)$ et $\mathrm{H}(w)$, sont, comme on sait, des fonctions entières; remarquons encore — ce qui sera utile dans la suite—que les zéros de la fonction $\Theta(w)$ sont situés aux points: $2mK+(2n+1)iK'$; et ceux de $\mathrm{H}(w)$ — aux points: $2mK+2niK'$.

La fonction analytique $\zeta=f(w)$, déterminée par la form. (22*), est holomorphe à l'intérieur du demi-rectangle fondamental (fig. 30) et sur le contour même, sauf les deux points $\Lambda\,(w=\pm iv_\lambda)$ où la fonction devient infinie comme un logarithme. C'est une fonction impaire. Elle fournit la représentation conforme et biunivoque de ce demi-rectangle fondamental sur la bande principale des ζ, comprise entre les deux parallèles $\xi=0$ et $\xi=+\pi$ et coupée le long du segment NF_2. En joignant à ce demi-rectangle fondamental le rectangle symétrique de lui par rapport à l'origine de coordonnées $w=0$ et en supposant que, dans le plan des w, les deux segments $F_2\Lambda$ forment les coupures (fig. 30), nous parviendrons à la représentation de cette seconde moitié du rectangle fondamental sur la bande bornée par les parallèles: $\xi=-\pi$ et $\xi=0$. Au contraire, si nous laissons le point w traverser ces coupures en entourant un des deux points Λ, le logarithme qui intervient dans la formule (22*) augmente ou diminue (suivant le sens du parcours) de $2\pi i$ et, par suite, la fonction $\zeta=f(w)$ — de 2π. De cette façon, on peut alors obtenir l'affixe du chaque point du plan des ζ en faisant décrire au point w le chemin convenable, d'ailleurs entièrement situé à l'intérieur de ce rectangle fondamental.

---

[1]) P. Appell et E. Lacour, l. c. p. 276.

Dans la pratique de calcul, on tire parti du fait que toutes les deux fonctions, $\Theta(w)$ et $H(w)$, admettent les développements en séries convergeant très rapidement:

$$\left.\begin{aligned} \Theta(w) &= 1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi w}{K} - 2q^9\cos 3\frac{\pi w}{K} + \dots; \\ H(w) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi w}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\frac{\pi w}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5\frac{\pi w}{2K} - \dots; \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

où:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}. \qquad (24^*)$$

Ces séries convergent absolument pour $\left|\frac{w}{K}\right|$ borné et $|q| < 1$, ce qui a, dans notre problème, toujours lieu, sauf le cas limite: $k = 1$. Le module k étant réel est plus petit que l'unité (voir la form. 14), les quantités K, K' et q sont réelles et positives. Par suite, si la quantité q n'est trop voisine de l'unité, la convergeance de ces séries est très rapide. Si ce n'est pas le cas, on peut toujours, en s'appuyant sur les formules: [1])

$$\Theta(w\,|\,K, iK') = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{\pi w^2}{4KK'}}\,H_1(iw\,|\,K', iK), \quad H(w\,|\,K, iK') = -i\sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{\pi w^2}{4KK'}}\,H(iw\,|\,K', iK), \qquad (25)$$

passer à la série:

$$H(iw\,|\,K', iK) = i\left[2\sqrt[4]{q'}\,\mathrm{Sinh}\frac{\pi w}{2K'} - 2\sqrt[4]{q'^9}\,\mathrm{Sinh}\,3\frac{\pi w}{2K'} + \cdots\right], \qquad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}, \qquad (26)$$

et aux autres, analogues. Il est vrai qu'alors au lieu des fonctions trigonométriques y apparaissent les fonctions hyperboliques prenant des grandes valeurs pour $\left|\frac{w}{K'}\right|$ grand — ce qui semble présenter pour le calcul numérique un inconvénient assez grave. Mais, d'abord, on peut évidemment supposer toujours que $|w| \leqslant |K + iK'| \leqslant \sqrt{K^2 + K'^2}$; et d'autre part, ces séries étant alors construites avec les périodes K' et iK, correspondant au module complémentaire k', la nouvelle quantité q' dont dépend la rapidité de la convergeance des ces séries est égale à $e^{-\pi\frac{K}{K'}}$, tandis que $\left|2\,\mathrm{Sinh}\frac{\pi w}{2K'}\right|$ est, en tout cas, moindre que $\exp\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{K}{K'}\right)^2}\,\right]$. Par suite, même dans le cas le plus désavantageux, lorsque $w = K + iK'$ et le rapport $\frac{K}{K'}$ augmente indéfiniment $(k' \to 0)$, tous les termes du développement (26) à partir du deuxième tendent vers zéro, et cela d'une manière très rapide, savoir plus rapidement que $e^{-\pi\left[(n-1)^2 - 1/4\right]\frac{K}{K'}}$.

Ainsi, soit dans un (24), soit dans l'autre (26) groupe des développements, la quantité q (resp. q') se présentera toujours comme plus petite que $e^{-\pi} < \frac{1}{23}$ $\left(\text{à ce point de vue le cas le plus désavantageux a lieu lorsque } K = K', \text{ c'est-à-dire: } k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot$ C'est en raison

[1]) *l. c.*, p. 130.

de cela qu'il suffit, pour la plupart des cas où il s'agit du calcul numérique, de n'envisager dans les développements (24) et (26) que les deux premiers termes.

Observons cependant que la maniabilité de la formule (22*) est un peu diminuée par la nécessité de choisir la détermination convenable de la fonction multiforme $\ln \frac{H(w_0 - w)}{H(w_0 + w)}$. Pour éviter toute erreur, il convient donc de se rendre compte des variations possibles des fonctions $H(w_0 - w)$ et $H(w_0 + w)$ quand la variable complexe w parcourt un chemin situé entièrement à l'intérieur du ractangle fondamental (fig. 30). À cet effet, il faut évidemment examiner la fonction générale $H(w)$ dans une région plus vaste; on peut s'assurer facilement qu'il suffit de considérer un rectangle quatre fois plus grand, de sommets: $\pm 2K \pm 2iK'$. [1])

Remarquons d'abord que la fonction $H(w)$ étant impaire et prenant des valeurs imaginaires conjuguées pour des valeurs conjuguées de w, on peut se borner à l'examen du cas où la variable w se trouve dans le premier quadrant.

Envisageons y donc un rectangle dont les deux côtés, un — situé sur l'axe de quantités réelles et l'autre — sur l'axe de quantités purement imaginaires, sont respectivement de la longueur $2K$ et $2K'$. Nous partageons ce rectangle en quatre rectangles élémentaires, égaux, que nous désignerons par: I, II, III et IV (voir la fig. 31). Les sommets de ces rectangles sont marqués par les chiffres, depuis 0 jusqu'à 8.

Pour le problème en question, comme nous nous convaincrons dans la suite, l'essentiel est d'examiner la représentation du contour C (0 — 2 — 4 — 6 — 0) du rectangle considéré sur le plan de la variable complexe $z = H(w)$. Nous commencerons par la détermination des points w, où la dérivée $H'(w)$ devient égale à zéro. Prenons donc, comme point de départ, la formule bien connue [2]), déterminant la dérivée logarithmique

$$\frac{H'(w)}{H(w)} = \zeta(w \mid \omega, \omega') - \frac{\eta}{\omega} w, \qquad (\eta = \zeta\omega), \tag{27}$$

dans l'hypothèse, bien entendu, où les demi-périodes ω et ω', avec lesquelles est construite la fonction de Weierstrass $\zeta(w \mid \omega, \omega')$, ne sont pas indépendantes, mais:

$$\omega = K, \qquad \omega' = iK'; \tag{27*}$$

comme on sait, la fonction ζw est une fonction impaire, méromorphe, ayant des pôles simples, de résidu 1; notons encore que

$$\zeta(w + 2\omega) = \zeta w + 2\eta \qquad \text{et} \qquad \zeta(w + 2\omega') = \zeta w + 2\eta', \qquad \text{où:} \quad \eta = \zeta\omega, \quad \eta' = \zeta\omega'. \tag{27**}$$

En observant maintenant qu'aux points 0, 2, 4 et 6 (les seuls points, dans la région considérée, où la fonction même $H(w)$ s'annule) la dérivée $H'(w)$ n'est pas égale à zéro [3]),

---

[1]) Lorsqu'il s'agit exclusivement de la variation de $H(w)$ dans un rectangle élémentaire, de sommets $\pm K \pm iK'$, on en peut consulter l'ouvrage: Tannery et Molk, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques,* t. III, p. 154 et sv.

[2]) *l. c.*, t. II, p. 192, form. LXXVIII. Il y faut poser, $\sqrt{e_1 - e_3} = 1$, à cause des égalités (27*).

[3]) En effet, on a

$$H(w) = \sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, w\, \Theta(w),$$

d'où:

$$H'(w) = \sqrt{k}\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w\, \Theta(w) + \sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, w\, \Theta'(w);$$

on voit (form. 27) que les zéros de la dérivée $H'(w)$ se trouvent aux points où s'annule la fonction:

$$f(w) = \zeta w - \frac{\eta}{\omega} w .$$

Mais

$$f'(w) = -\wp w - \frac{\eta}{\omega} ;$$

en remarquant ensuite que, le long du segment de droite $0 - 1 - 2$, on a $\wp w \geqq e_1$, et en tenant compte de ce que [1])

$$e_1 + \frac{\eta}{\omega} > 0 ,$$

on s'assure que le long de ce segment: $f'(w) < 0$, c'est-à-dire que la fonction même

$$f(w) = \frac{H'(w)}{H(w)}$$

y diminue constamment de la valeur $+\infty$ au point $w = 0$ jusqu'à $-\infty$ au point $w = 2K$. Elle devient égale à zéro au milieu 1 du segment:

$$f(K) = \eta - \frac{\eta}{\omega} \omega = 0 .$$

Passons maintenant à l'examen de la dérivée $H'(w)$ le long du côté suivant 2—3—4. On y peut poser

$$w = 2K + iv = 2\omega + iv .$$

Ainsi

$$f'(w) = -\wp(2\omega + iv) - \frac{\eta}{\omega} = -\wp(iv) - \frac{\eta}{\omega} \cdot$$

Lorsque $0 \leqq v \leqq 2K'$, on a $-\infty \leqq \wp(iv) \leqq e_3$, mais [1])

$$e_3 + \frac{\eta}{\omega} < 0 ;$$

donc, il en résulte: $$f'(w) > 0 .$$

mais, aux points $w = 0,\ 2K,\ 2K + 2iK'$ et $2iK'$, la fonction sn s'annule, on y peut donc former le tableau suivant:

w	0	$2K$	$2K + 2iK'$	$2iK'$
sn w	0	0	0	0
cn w	$+1$	-1	$+1$	-1
dn w	$+1$	$+1$	-1	-1
$\Theta(w)$	$+\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$	$+\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$	$-\frac{1}{q}\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$	$-\frac{1}{q}\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$
$H'(w)$	$+\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$	$-\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$	$+\frac{1}{q}\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$	$-\frac{1}{q}\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$

[1]) Voir, p. ex. Tannery et Molk, *l. c.*, t. II, p. 5, (form. XXX). Il y faut poser: $\omega_1 = \omega$ et $\eta_1 = \eta$.

Par suite, le long de ce segment, la fonction

$$f(w) = 2\eta + \zeta(iv) - \frac{\eta}{\omega}(2\omega + iv) = \zeta(iv) - i\frac{\eta}{\omega}v,$$

en restant purement imaginaire, croît constamment de $-i\infty$ pour $w = 2K$ par la valeur

$$f(2K + iK') = 2\eta + \eta' - \frac{\eta}{\omega}(2\omega + \omega') = \frac{\eta'\omega - \eta\omega'}{\omega} = -\frac{i\pi}{2\omega},$$

qu'elle prend au point $2K + iK'$, jusqu'à $+i\infty$ au point $w = 2K + 2iK'$; sur ce segment, la dérivée $H'(w)$ devient donc égale à zéro au point $3'$, situé au-dessus du milieu 3 du segment en question.

Ensuite, sur le segment 4 — 5 — 6, on a:

$$w = 2iK' + u,$$

la variable u décroissant de la valeur $2K$ au point 4 jusqu'à zéro au point 6. Ainsi

$$f(w) = f(2iK' + u) = \zeta u + 2\eta' - \frac{\eta}{\omega}(2\omega' + u) = \zeta u - \frac{\eta}{\omega}u - \frac{i\pi}{\omega}.$$

On en voit que la fonction $f(w)$, et par suite $H'(w)$ aussi, n'y peut point s'annuler, car le coefficient de la partie imaginaire y reste constant: $-\frac{\pi}{\omega}$.

Enfin, sur le dernier côté 6 — 7 — 0 du rectangle, on a $w = iv$, la variable v diminuant de $2K'$ jusqu'à 0. Par suite:

$$f'(w) = -p(iv) - \frac{\eta}{\omega}$$

et, de même que pour le côté opposé, on y a constamment:

$$f'(w) > 0.$$

Cela veut dire que la fonction $f(w)$ décroît en même temps que v. Elle y est partout purement imaginaire. Égale au point 6 à $+i\infty$, elle change ensuite de signe en devenant, au point 7, égale à

$$f(iK') = \eta' - \frac{\eta}{\omega}\omega' = -\frac{i\pi}{2\omega},$$

et en tendant enfin vers $-i\infty$ pour le point 0. Il en résulte donc que la dérivée $H'(w)$ devient zéro au point $6'$, situé au-dessus du point 7. L'ordonnée de ce point $6'$ est la même que l'ordonnée du point homologue $3'$.

Ajoutons encore que les images, dans le plan de $H(w)$, des points $3'$ et $6'$ ont les affixes opposés, d'ailleurs de même que les images de tous les couples des points w dont les cordonnées complexes ne diffèrent que de $2K$, car $H(w + 2K) = -H(w)$.

Ainsi, sur le contour 0—1—2—3—4—5—6—7—0 du rectangle considéré, ils se trouvent trois points: 1, $3'$ et $6'$, où la derivée $H'(w)$ s'annule. Cela permet déjà de se rendre compte des variations de la fonction $H(w)$ le long de ce contour C. Voici un aperçu général de la variation en question (fig. 31). Lorsque la variable w croît par valeurs réelles de 0 à $2K$, la fonction $H(w)$ d'abord croît aussi de 0 jusqu'à la valeur

$$H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},$$

pour diminuer après jusqu'à zéro: $\mathrm{H}(2K)=0$. Ensuite, le point w venant le long de la droite $u=2K$, du point $w=2K$ jusqu'à $w=2K+2iK'$, la fonction $\mathrm{H}(2K+iv)=-\mathrm{H}(iv)$, étant purement imaginaire, diminue jusqu'au moment où le point w atteint le point $3'$; puis, la dérivée $\mathrm{H}'(w)$ y changeant de signe, la fonction $\mathrm{H}(w)$ commence alors croître pour revenir à la valeur zéro lorsque le point w vient au point 4. De ce moment, le point w décrivant le segment 4 — 5 — 6 de la droite $v=2K'$, la fonction $\mathrm{H}(w)$ prend des valeurs complexes

$$\mathrm{H}(2iK'+u)=-e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')}\,\mathrm{H}(u)=-\frac{1}{q}\,e^{-\frac{i\pi u}{K}}\,\mathrm{H}(u)=\frac{1}{q}\,e^{i\pi\frac{K-u}{K}}\,\mathrm{H}(u)\,.$$

On en voit que, u diminuant de la valeur $2K$ par K jusqu'à zéro, le module de $\mathrm{H}(w)$ augmente de zéro jusqu'à $\frac{1}{q}\mathrm{H}(K)$ pour $w=K+2iK'$, pour ensuite diminuer jusqu'à zéro en prenant les mêmes valeurs pour les points symétriques par rapport au point 5. Quant à l'argument de $\mathrm{H}(w)$, il croît constamment de sa valeur initiale — supposons qu'elle soit égale à $-\pi$ $(u=2K)$ — par la valeur 0 $(u=K)$, jusqu'à $+\pi$ $(u=0)$ (voir la fig. 31). Enfin

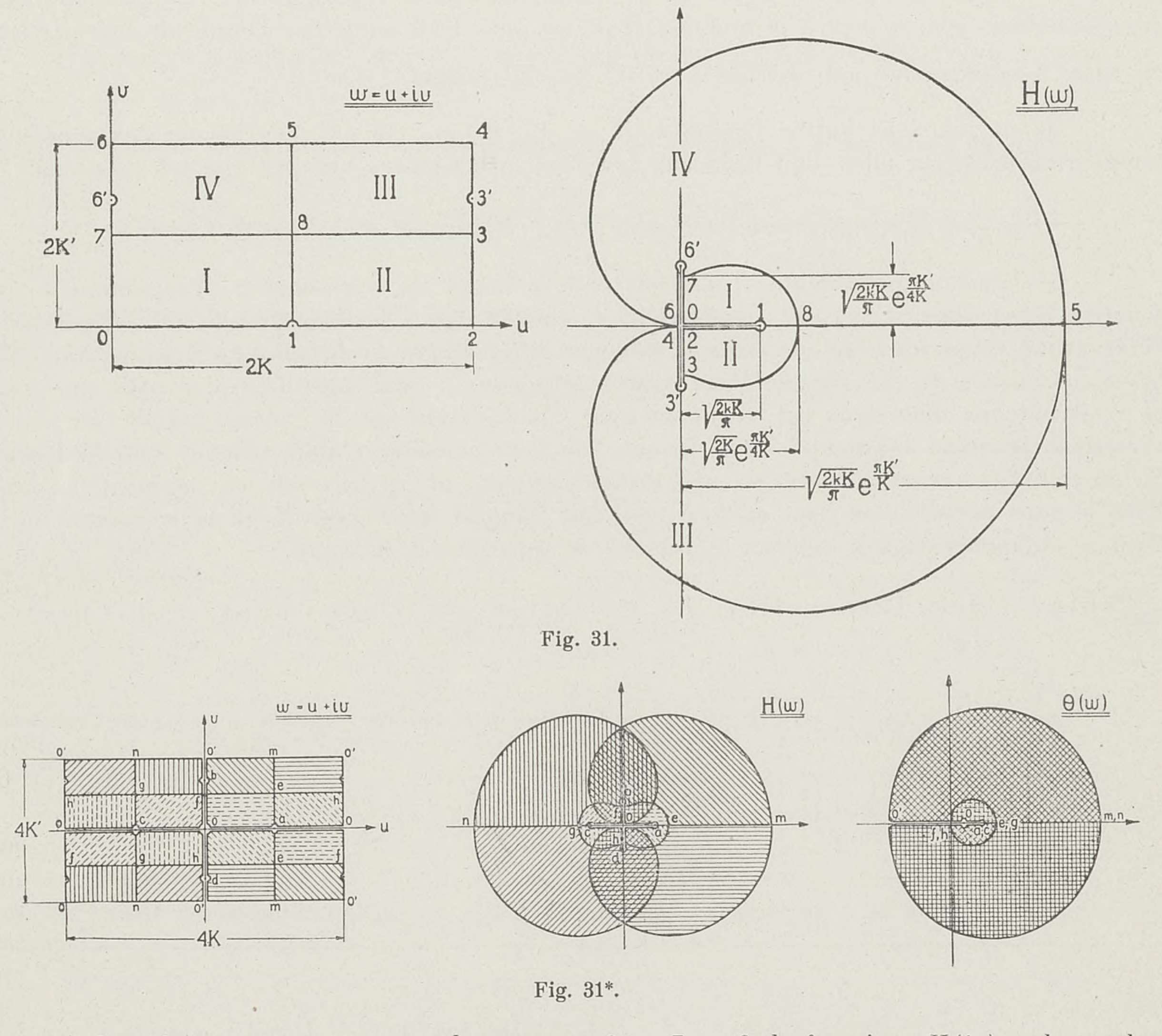


Fig. 31.

Fig. 31*.

lorsque le point w se trouve sur le segment 6 — 7 — 0, la fonction $\mathrm{H}(iv)$ admet des valeurs opposées à celles correspondant aux points homologues $(2K+iv)$ du segment 2 — 3 — 4. L'image du segment 6 — 7 — 0 possède donc un point de rebroussement $6'$, tout de même que celui du segment opposé $(w_{6'}=w_{3'}-2K)$.

Ainsi, le contour C du rectangle envisagé est représenté, dans le plan des $z = \mathrm{H}(w)$, sur la simple (sans points doubles) courbe fermée $C' : 0 - 1 - 2 - 3 - 3' - 4 - 5 - 6 - 6' - 7 - 0$. La fonction entière $\mathrm{H}(w)$ étant partout holomorphe, on déduit du théorème connu[1]), concernant l'inversion des fonctions analytiques, que l'intérieur de ce rectangle est représenté sur la région, intérieure à la courbe C', et cela d'une manière biunivoque et conforme — de là résulte déjà que la dérivée $\mathrm{H}'(w)$ ne peut s'annuler nulle part à l'intérieur du rectangle examiné — c'est pourquoi, dans la représentation de ce rectangle que l'on voit sur la fig. 31, les angles sont conservés partout, sauf les trois points: 1, 3' et 6'.

Pour pouvoir suivre plus aisément la variation de la fonction $\mathrm{H}(w)$, nous avons présenté encore sur la fig. 31* le schéma des images de tous les seize rectangles élémentaires composant le rectangle entier, de sommets $\pm 2K \pm 2iK'$. Les régions et les points correspondants y sont marqués d'une même façon caractéristique.

D'une manière tout analogue, on peut discuter aussi la variation de la fonction $\Theta(w)$. Nous nous bornons ici à présenter seulement le schéma de cette variation en donnant les images des seize rectangles élémentaires envisagés plus haut, images fournis par la fonction examinée $\Theta(w)$ (voir la même figure 31*). D'ailleurs, en se reportant aux résultats obtenus précédemment par rapport à la fonction $\mathrm{H}(w)$ on peut bien simplifier l'étude de la variation de cette fonction $\Theta(w)$ qui est liée à $\mathrm{H}(w)$ par la relation: $\Theta(w) = \dfrac{\mathrm{H}(w)}{\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\, w}$.

Quant aux deux autres fonctions, $\mathrm{H}_1(w)$ et $\Theta_1(w)$, on n'a plus besoin des schémas supplémentaires, car elles sont liées aux fonctions précédentes par des simples relations:

$$\mathrm{H}_1(w) = \mathrm{H}(w + K) = -\mathrm{H}(w - K) \quad \text{et} \quad \Theta_1(w) = \Theta(w + K) = \Theta(w - K).$$

De l'analyse précédente, il s'ensuit déjà le mode de variation de l'argument de la fonction $\mathrm{H}(w)$ dans tout le rectangle envisagé, de sommets $\pm 2K \pm 2iK'$. Nous avons réuni les résultats dans le tableau schématique ci-dessous en y admettant que la valeur initiale de cet argument est égal à zéro pour w réel, positif et plus petit que $2K$, et qu'ensuite on détermine cet argument par continuation de la valeur initiale en deux directions jusqu'au segment $(-2K,\ 0)$ que l'on veut considérer alors comme une coupure. Si, au-contraire, avant s'arrêter en un certain point w, on a traversé ce segment m fois dans le sens positif (d'en haut en bas) et n fois dans le sens négatif, il faut ajouter aux limites, indiquées dans le tableau ci-dessous, la quantité: $2(m - n)\pi$.

Tableau des intervalles de variation de l'argument φ de $\mathrm{H}(w)$

	$-2K$ … $-K$	$-K$ … 0	0 … K	K … $2K$
$2iK'$ … iK'	$\pi \leqslant \varphi < 2\pi$	$0 < \quad \leqslant \pi$	$0 \leqslant \varphi < \pi$	$-\pi < \varphi \leqslant 0$
iK' … 0	$\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi$	$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$	$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0$
0 … $-iK'$	$-\frac{3}{2}\pi \leqslant \varphi \leqslant -\pi$	$-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0$	$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$
$-iK'$ … $-2iK'$	$-2\pi < \varphi \leqslant -\pi$	$-\pi \leqslant \varphi < 0$	$-\pi < \varphi \leqslant 0$	$0 \leqslant \varphi < \pi$

[1]) Voir la note sur la page 7.

En s'appuyant sur les résultats acquis, nous revenons maintenant à déterminer les paramètres de la représentation en question.

Cherchons d'abord à satisfaire à la condition d'uniformité de cette représentation; cette condition (form. 7 et 7*) se réduit, dans notre cas, à l'égalité:

$$\zeta_M = \zeta_N, \qquad \text{c'est-à-dire:} \qquad \zeta(K) = \zeta(K \pm iK'). \tag{28}$$

Posons, en outre, pour abréger:

$$\zeta = A\,w - i \ln \mathrm{X}, \tag{29}$$

où (form. 22*):

$$A = i\left(\frac{b}{h} - 1\right)\frac{\mathrm{cn}(i\varrho_\lambda)\,\mathrm{dn}(i\varrho_\lambda)}{\mathrm{sn}(i\varrho_\lambda)} - 2i\,\frac{\Theta'(i\varrho_\lambda)}{\Theta(i\varrho_\lambda)} = \text{const.}; \qquad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{H}(i\varrho_\lambda - w)}{\mathrm{H}(i\varrho_\lambda + w)} \cdot \tag{30}$$

Or, d'après les formules: [1])

$$\mathrm{H}(w + 2K) = -\mathrm{H}(w), \qquad \mathrm{H}(w + 2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(w + iK')}\,\mathrm{H}(w), \tag{31}$$

on a:

$$\mathrm{H}(i\varrho_\lambda - K) = -\mathrm{H}(i\varrho_\lambda + K), \qquad \mathrm{H}(i\varrho_\lambda - K \mp iK') = -e^{\mp\frac{\pi}{K}\varrho_\lambda}\,\mathrm{H}(i\varrho_\lambda + K \pm iK');$$

donc, en tenant compte de la variation indiquée de l'argument φ de $\mathrm{H}(w)$, on obtient:

$$\zeta_M = AK + \pi; \qquad \zeta_N = A(K \pm iK') + \pi \pm i\frac{\pi}{K}\varrho_\lambda = \zeta_M \pm i\left(AK' + \frac{\pi}{K}\varrho_\lambda\right) \cdot$$

Ainsi, pour que la condition (28) soit remplie, il doit être:

$$A = -\frac{\pi\varrho_\lambda}{KK'} \cdot \tag{32}$$

Par suite:

$$\zeta = -\frac{\pi\varrho_\lambda}{KK'}\,w - i\ln\frac{\mathrm{H}(i\varrho_\lambda - w)}{\mathrm{H}(i\varrho_\lambda + w)}, \tag{33}$$

et en particulier:

$$\zeta_M = \zeta_N = -\frac{\pi\varrho_\lambda}{K'} + \pi. \tag{34}$$

Comme nous avons désigné auparavant cette abscisse par ξ_0, on a, par conséquent:

$$\xi_0 = \pi\left(1 - \frac{\varrho_\lambda}{K'}\right); \qquad \text{d'où:} \qquad \varrho_\lambda = \left(1 - \frac{\xi_0}{\pi}\right)K'; \tag{35}$$

et il s'ensuit de l'équation (32) une relation entre les paramètres b et h:

$$\frac{b}{h} = 1 + \frac{2\,\mathrm{sn}(i\varrho_\lambda)}{\mathrm{cn}(i\varrho_\lambda)\,\mathrm{dn}(i\varrho_\lambda)}\left[\mathrm{Z}(i\varrho_\lambda) + i\frac{\pi\varrho_\lambda}{2KK'}\right], \tag{36}$$

---

[1]) Voir: P. Appell et E. Lacour, *l. c.*, p. 488.

où la fonction *Zêta* est définie par la formule:

$$Z(w) = \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)} \cdot$$

En envisageant encore les formules (20), (20*) et (35), on peut écrire:

$$\frac{b}{h} = 1 + \frac{\sin 2\chi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \chi}} \left[i Z(i v_\lambda) - \frac{\pi - \xi_0}{2K} \right] \cdot \tag{36*}$$

Il faut ici insister sur ce que l'argument de la fonction $Z(i v_\lambda | K, iK')$, intervenant dans la formule (36), est purement imaginaire. Cela ne présente pas de difficultés, si l'on calcule cette fonction en partant de la formule l'exprimant sous la forme du quotient des deux séries entières, $\Theta'(w)$ et $\Theta(w)$, sauf le cas cependant où le module k s'approche de l'unité. Dans ce dernier cas, et aussi lorsqu'on veut faire usage des Tables de L e g e n d r e, d'après la formule

$$Z(w) = \mathrm{E}(\mathrm{am}\, w) - \frac{E}{K} w, \tag{37}$$

il convient de n'envisager que des arguments réels, en passant de la fonction $Z(i v_\lambda | K, i\mathrm{K}')$ à celle $Z(v_\lambda | K', iK)$, construite avec les périodes: $2K'$ et $2iK$, c'est-à-dire relative au module complémentaire k'. Or, on a (voir la form. 25):

$$Z(i v_\lambda | K, iK') = \frac{d}{d(i v_\lambda)} \ln \Theta(i v_\lambda | K, iK') = -i \frac{d}{d v_\lambda} \ln \left[e^{\frac{\pi v^2 \lambda}{4KK'}} \mathrm{cn}(v_\lambda | k') \, \Theta(v_\lambda | K', iK) \right] =$$

$$= -i \left[\frac{\pi v_\lambda}{2KK'} - \frac{\mathrm{sn}(v_\lambda | k') \, \mathrm{dn}(v_\lambda | k')}{\mathrm{cn}(v_\lambda | k')} + Z(v_\lambda | K', iK) \right] \cdot \tag{37*}$$

Par suite:

$$\frac{b}{h} = \cos 2\chi + \frac{\sin 2\chi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \chi}} Z(v_\lambda | K', iK),$$

où:

$$Z(v_\lambda | K', iK) = E(\chi, k') - \frac{E'}{K'} v_\lambda = E(\chi, k') - \left(1 - \frac{\xi_0}{\pi}\right) E'; \tag{37**}$$

donc:

$$\frac{b}{h} = \cos 2\chi + \frac{\sin 2\chi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \chi}} \left[E(\chi, k') - \left(1 - \frac{\xi_0}{\pi}\right) E' \right], \tag{36**}$$

ou encore (form. 21):

$$b = m + 8a \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \chi}}{k'^2 \sin 2\chi} Z(v_\lambda | K', iK). \tag{36***}$$

Il est encore à remarquer que la condition d'uniformité (32) assure déjà ce que la coordonnée ζ du point F_2 est égale à $+\pi$, conformément à notre énoncé initial (voir la fig. 28). En effet:

$$\zeta_{F_2} = \zeta(\pm i K') = \mp i \frac{\pi}{K} v_\lambda - i\left(i\pi \mp \frac{\pi}{K} v_\lambda\right) = +\pi \,. \tag{38}$$

La deuxième condition à satisfaire est celle qui exprime que la transformation considérée $z = z(t)$ devient identité au point à l'infini $z = t = \infty$:

$$\lim \left(\frac{z}{t}\right)_{\substack{z=\infty \\ t=\infty}} = 1 \,. \tag{39}$$

Nous avons (form. 1):

$$z = -c \,.\, \cos\zeta = -\frac{c}{2}(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}) \,.$$

Au point $t = \infty$ correspondent, dans le plan des w, les deux points Λ, situés sur le bord du demi-rectangle fondamental: $w = \pm i v_\lambda$. La variable complexe ζ y devient infiniment grande de même manière que le logarithme (form. 33). On a, par suite, en faisant usage des notations (30) et (32):

$$z = -\frac{c}{2}\left(e^{iAw + \ln X} + e^{-iAw - \ln X}\right) = -\frac{c}{2}\left(X e^{iAw} + \frac{1}{X} e^{-iAw}\right) =$$

$$= -\frac{c}{2}\left[\frac{\mathrm{H}(i v_\lambda - w)}{\mathrm{H}(i v_\lambda + w)} e^{iAw} + \frac{\mathrm{H}(i v_\lambda + w)}{\mathrm{H}(i v_\lambda - w)} e^{-iAw}\right] \,. \tag{40}$$

Nous voyons de la dernière formule que z tend vers l'infini de la même manière dans les deux cas: celui où la variable w s'approche du point $+i v_\lambda$, et celui où elle tend vers le point $-i v_\lambda$. Supposons donc, pour fixer les idées, que c'est vers le point $+i v_\lambda$ que tend la variable w. On peut alors, dans le dernier membre de l'équation (40), négliger le premier terme qui devient infiniment petit. Nous aurons donc:

$$\lim_{\substack{z=\infty \\ t=\infty}} \frac{z}{t} = -\frac{c}{2} e^{A v_\lambda} \mathrm{H}(2 i v_\lambda) \lim_{\substack{t=\infty \\ w=i v_\lambda}} \frac{1}{t\, \mathrm{H}(i v_\lambda - w)} \,.$$

Or en partant de la formule bien connue [1]):

$$\mathrm{sn}(a + w)\,\mathrm{sn}(a - w) = \frac{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 w} \tag{41}$$

qui peut être écrite également sous la forme:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\mathrm{H}(i v_\lambda + w)}{\Theta(i v_\lambda + w)} \cdot \frac{\mathrm{H}(i v_\lambda - w)}{\Theta(i v_\lambda - w)} = \frac{\mathrm{sn}^2(i v_\lambda) - \mathrm{sn}^2 w}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2(i v_\lambda)\mathrm{sn}^2 w} \,, \tag{41*}$$

et en tenant compte encore de la formule (18*), on trouve:

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ w=i v_\lambda}} \Big[\, t \,.\, \mathrm{H}(i v_\lambda - w) \,\Big] = -2 k h\, \Theta(0) \frac{\Theta(2 i v_\lambda)}{\mathrm{H}(2 i v_\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{sn}^2(i v_\lambda)}{1 - k^2 \mathrm{sn}^4(i v_\lambda)} \,.$$

---

[1]) Tannery et Molk, l. c., t. II, p. 287, form. LXXIV (1).

Par suite:

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ z=\infty}} \frac{z}{t} = \frac{c}{4kh} e^{Av_\lambda} \frac{\mathrm{H}^2(2i\rho_\lambda)}{\Theta(0)\Theta(2i\rho_\lambda)} \cdot \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^4(i\rho_\lambda)}{\mathrm{sn}^2(i\rho_\lambda)};$$

on en conclut la condition cherchée:

$$\frac{c}{h} = -4k\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{\frac{\pi v^2_\lambda}{KK'}} \frac{\Theta(2i\rho_\lambda)}{\mathrm{H}^2(2i\rho_\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{tg}^2\chi}{1-k^2\,\mathrm{tg}^4\chi}\,. \tag{42}$$

On pourrait dire que cette condition détermine l'échelle dans laquelle il faut tracer les courbes situées dans le plan de la variable z (fig. 28).

Ajoutons encore que l'on peut exprimer le rapport $\frac{c}{h}$ aussi sous des autres formes, souvent plus commodes; d'abord, en se servant des formules connues[1]), on a:

$$\frac{\Theta(2i\rho_\lambda)}{\mathrm{H}(2i\rho_\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(2i\rho_\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^4(i\rho_\lambda)}{2\,\mathrm{sn}(i\rho_\lambda)\,\mathrm{cn}(i\rho_\lambda)\,\mathrm{dn}(i\rho_\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(1-k^2\,\mathrm{tg}^4\chi)\cos^2\chi}{2i\,\mathrm{tg}\,\chi\sqrt{1-k'^2\sin^2\chi}}\,.$$

et par suite:

$$\frac{c}{h} = i\sqrt{2kk'\frac{K}{\pi}}\, e^{\frac{\pi v^2_\lambda}{KK'}} \cdot \frac{\sin 2\chi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\chi}} \frac{1}{\mathrm{H}(2i\rho_\lambda)}\,, \tag{42*}$$

ou bien:

$$\frac{c}{h} = \sqrt{2k'\frac{K}{\pi}}\, e^{\frac{\pi v^2_\lambda}{KK'}} \frac{\cos^4\chi - k^2\sin^4\chi}{1-k'^2\sin^2\chi} \cdot \frac{1}{\Theta(2i\rho_\lambda)}\,. \tag{42**}$$

Lorsque le module k dépasse la valeur $\sqrt{1/2}$, il est préférable de se débarrasser des arguments purement imaginaires (voir la form. 25), en passant de la fonction $\mathrm{H}(2i\rho_\lambda \,|\, K, iK')$ à $\mathrm{H}(2\rho_\lambda \,|\, K', iK)$:

$$\frac{c}{h} = \sqrt{2kk'\frac{K'}{\pi}}\, \frac{\sin 2\chi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\chi}} \cdot \frac{1}{\mathrm{H}(2\rho_\lambda \,|\, K', iK)} =$$

$$= \sqrt{2k\frac{K'}{\pi}} \cdot \frac{1-k'^2\sin^4\chi}{1-k'^2\sin^2\chi} \cdot \frac{1}{\Theta(2\rho_\lambda \,|\, K', iK)}\,. \tag{42***}$$

Il est à remarquer que, suivant le cas, les unes ou les autres formules se montrent plus propres aux applications.

Avec la dernière condition, nous avons établi toutes les relations liant les paramètres introduits (form.: 20, 21, 36 et 42). On en voit qu'il ne reste que deux paramètres indépendants: k et χ (sans compter le paramètre $4a = n - m$ déterminant la longueur du segment primitif MN). Ajoutons ici qu'au lieu de prendre le couple des paramètres k et χ, on peut choisir aussi bien celui-ci: k et ρ_λ (form. 20*), ou encore: k et ξ_0 (form. 35). Ce dernier système est d'autant préférable que le paramètre ξ_0 a une très simple signification géométrique: il est égal à l'angle que forme une des asymptotes de notre hyperbole avec la direction de l'axe de quantités réelles. Dans la condition admise, $\frac{\pi}{2} \leqslant \xi_0 \leqslant \pi$, en désignant par α celui des deux angles en question qui est aigu (fig. 28), nous pourrons écrire:

$$\alpha = \pi - \xi_0\,. \tag{43}$$

---

[1]) Voir, p. ex.: P. Appell et E. Lacour, *l. c.*, p. 133, 152 et 157.

L'hyperbole étant déterminée sans ambiguïté par ses asymptotes et la distance $2c$ des ses foyers, il suffit — pour définir complètement la position de l'arc AB — de trouver encore la seconde coordonnée elliptique, $\pm\eta_0$, des extrémités A et B de cet arc d'hyperbole. Or les formules (36 — 36***) déterminent l'abscisse commune b des images des extrémités A et B dans le plan des t, c'est-à-dire dans le plan du segment primitif. Pour trouver maintenant les deux valeurs de la variable w correspondant aux points A et B, posons d'abord conformément à la fig. 30:

$$w_A = K + i v_0 \quad \text{et} \quad w_B = K - i v_0\,, \quad \text{où:} \quad 0 < v_0 < K'\,, \tag{44}$$

et envisageons ensuite ce qui résulte des formules (17) et (36**):

$$\operatorname{sn}^2 w_A = \operatorname{sn}^2 w_B = -\operatorname{tg}\chi \frac{\sin\chi\left[E(\chi,k') - \frac{E'}{K'}v_\lambda\right] + \cos\chi\sqrt{1-k'^2\sin^2\chi}}{\cos\chi\left[E(\chi,k') - \frac{E'}{K'}v_\lambda\right] - \sin\chi\sqrt{1-k'^2\sin^2\chi}}\,; \tag{45}$$

Or:

$$\operatorname{sn}(K \pm i v_0) = \frac{\operatorname{cn}(i v_0)}{\operatorname{dn}(i v_0)} = \frac{1}{\operatorname{dn}(v_0|k')}\,.$$

Donc, en désignant par γ l'amplitude de $(v_0\,|\,k')$, on a:

$$\sin\gamma = \operatorname{sn}(v_0\,|\,k')\,, \quad \text{et} \quad \operatorname{dn}(v_0\,|\,k) = \Delta\gamma = \sqrt{1-k'^2\sin^2\gamma}\,, \tag{46}$$

et par suite:

$$\operatorname{cosec}\gamma = k'\sin\chi\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}\chi\sqrt{1-k'^2\sin^2\chi}}{E(\chi,k') - \frac{E'}{K'}v_\lambda}}\,. \tag{47}$$

La valeur de l'amplitude γ étant trouvée, on détermine v_0 à l'aide de la formule:

$$v_0 = F(\gamma\,,k')\,; \tag{47*}$$

et ensuite les coordonnées elliptiques:

$$\xi_0 \pm i\eta_0 = -\frac{\pi v_\lambda}{KK'}(K \pm i v_0) - i\ln\frac{\mathrm{H}(iv_\lambda - K \mp iv_0)}{\mathrm{H}(iv_\lambda + K \pm iv_0)} =$$

$$= -\frac{\pi v_\lambda}{K'} \mp i\pi\frac{v_0}{K}\cdot\frac{v_\lambda}{K'} + \pi - i\ln\frac{\mathrm{H}_1\left[i(v_\lambda \mp v_0)\right]}{\mathrm{H}_1\left[i(v_\lambda \pm v_0)\right]}\,,$$

où:

$$\mathrm{H}_1(w) = \mathrm{H}(w+K) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\operatorname{cn} w\,\Theta(w)\,;$$

$$\mathrm{H}_1(w) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi w}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\frac{\pi w}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5\frac{\pi w}{2K} + \cdots\,;$$

$$\mathrm{H}_1(iv) = 2q^{\frac{1}{4}}\operatorname{Cosh}\frac{\pi v}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\operatorname{Cosh} 3\frac{\pi v}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\operatorname{Cosh} 5\frac{\pi v}{2K} + \cdots$$

Ainsi, on retrouve la form. (35).

$$\xi_0 = \pi\left(1 - \frac{\rho_\lambda}{K'}\right),$$

et simultanément, on obtient:

$$\eta_0 = -(\pi - \xi_0)\frac{\rho_0}{K} + \ln\frac{H_1\left[i(\rho_\lambda + \rho_0)\right]}{H_1\left[i(\rho_\lambda - \rho_0)\right]}, \tag{48}$$

ou encore:

$$\eta_0 = \ln\frac{\Theta(\rho_\lambda + \rho_0 \mid K', iK)}{\Theta(\rho_\lambda - \rho_0 \mid K', iK)}. \tag{48*}$$

Les résultats de l'étude précédente sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Tableau de formules I.

$$z = -c \cdot \cos\zeta; \qquad \zeta = \int_{-h}^{t} \frac{(b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)}};$$

$$\zeta = -\frac{\pi\rho_\lambda}{KK'}w - i\ln\frac{H(i\rho_\lambda - w)}{H(i\rho_\lambda + w)}; \qquad w = F(\arcsin W, k); \qquad W = \operatorname{tg}\chi\sqrt{\frac{h+t}{h-t}}.$$

Paramètres primitifs: a, k et ξ_0.
Paramètres dérivés: α, ρ_λ, χ, h, m, n, c, b et η_0.

$$\alpha = \pi - \xi_0; \qquad \rho_\lambda = \left(1 - \frac{\xi_0}{\pi}\right)K'; \qquad \chi = \operatorname{am}(\rho_\lambda \mid k');$$

$$h = 8a\frac{1 - k'^2\sin^2\chi}{k'^2\sin^2 2\chi}; \qquad m = 8a\frac{1 - k'^2\sin^2\chi}{k'^2\sin^2 2\chi}\cos 2\chi; \qquad n = 8a\frac{1 - (1+k^2)\sin^2\chi}{k'^2\sin^2 2\chi};$$

$$c = 8a\sqrt{2k\frac{K'}{\pi}} \cdot \frac{1 - k'^2\sin^4\chi}{k'^2\sin^2 2\chi} \cdot \frac{1}{\Theta(2\rho_\lambda \mid K', iK)}; \quad b - m = 8a\frac{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\chi}}{k'^2\sin 2\chi}\left[E(\chi, k') - \left(1 - \frac{\xi_0}{\pi}\right)E'\right];$$

$$\operatorname{cosec}\gamma = k'\sin\chi\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}\chi\sqrt{1 - k'^2\sin^2\chi}}{E(\chi, k') - \frac{E'}{K'}\rho_\lambda}}; \qquad \rho_0 = F(\gamma, k');$$

$$\eta_0 = -(\pi - \xi_0)\frac{\rho_0}{K} + \ln\frac{H_1\left[i(\rho_\lambda + \rho_0)\right]}{H_1\left[i(\rho_\lambda - \rho_0)\right]}.$$

Ajoutons encore ici qu'en général il suffit de faire varier le paramètre ξ_0 seulement dans un des deux intervalles: $0 \leqslant \xi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leqslant \xi_0 \leqslant \pi$, car les cas $\xi_0 = \xi'$ et $\xi_0 = \pi - \xi'$ ne diffèrent que par la position de l'arc d'hyperbole que l'on veut transformer: ces deux arcs sont symétriques par rapport à l'axe des y.

3. Étude de quelques cas de dégénérescence.

Pour se rendre compte de l'influence des paramètres ξ_0 et k (ou k') sur la forme géométrique des arcs considérés, nous allons examiner les quatre cas particuliers.

1°. Nous commençons par le cas:

$$\xi_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \tag{49}$$

L'hyperbole en question dégénère alors en une droite: l'axe des quantités purement imaginaires, et l'arc AB — en un segment de droite. Nous allons montrer que cela-même résulte directement des formules précédentes.

D'abord, on obtient d'après la form. (35):

$$v_\lambda = \frac{1}{2} K' . \tag{50}$$

Or, étant [1])

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2},\ k\right) = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}\ ,$$

on a:

$$\sin\chi = \operatorname{sn}(v_\lambda \mid k') = \sqrt{\frac{1}{1+k}}\ .$$

Ensuite, de la formule [1])

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 w} = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta'(w-a)}{\Theta(w-a)} - \frac{\Theta'(w+a)}{\Theta(w+a)}\right] \cdot \tag{51}$$

on obtient, en posant $w = a = \dfrac{K'}{2}$

$$\frac{\Theta'\left(\frac{1}{2}K' \mid k'\right)}{\Theta\left(\frac{1}{2}K' \mid k'\right)} = \frac{1-k}{2}\ ; \tag{51*}$$

de là, il s'ensuit:

$$E(\chi, k') = \frac{E'}{K'} w + \frac{\Theta'(w \mid k')}{\Theta(w \mid k')} = \frac{1}{2} E' + \frac{1-k}{2} \cdot \tag{52**}$$

En portant ces valeurs dans la form. (36**), il vient:

$$\frac{b}{h} = \frac{2}{1+k}\left(\frac{1}{2} E' + \frac{1-k}{2} - \frac{1}{2} E'\right) - \frac{1-k}{1+k} = 0\ .$$

Ensuite, d'après les formules (21):

$$h = 2a\,\frac{1+k}{1-k}; \qquad m = -2a\ ; \qquad n = +2a\ .$$

---

[1]) P. Appell et E. Lacour, l. c., p. 153.

Prenons maintenant la formule (12) en y remplaçant les paramètres b, h, m et n par les expressions trouvées ci-dessus:

$$\zeta = -\int_{-2a\frac{1+k}{1-k}}^{t} \frac{t\,dt}{\sqrt{(4a^2 - t^2)\left[t^2 - 4a^2\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2\right]}}$$

En y effectuant l'intégration, on obtient:

$$\zeta = \arcsin\left[\frac{1-k}{4a\sqrt{k}}\sqrt{4a^2\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 - t^2}\right],$$

d'où

$$z = -c \cdot \cos\zeta = -\frac{c}{4a} \cdot \frac{1-k}{\sqrt{k}}\sqrt{t^2 - 4a^2}$$

Mais, d'après la form. (42^{***}),

$$c = 4a\frac{\sqrt{k}}{1-k};$$

par suite:

$$z^2 = t^2 - 4a^2.$$

Mais ce n'est autre chose que la fonction donnant la représentation conforme de l'extérieur d'un segment de droite sur l'extérieur d'un autre segment dont les extrémités correspondent au point du milieu du premier segment et *vice-versa*.

Remarquons encore que cela résulte aussi des valeurs des expressions pour γ, v_0 et η_0. En effet:

$$\operatorname{cosec}\gamma = k'\sqrt{\frac{1}{1+k}\left(1 + 2\frac{k}{1-k}\right)} = \sqrt{1+k}\ ;$$

il vient de là:

$$\gamma = \chi, \qquad v_0 = v_\lambda = \frac{K'}{2};$$

et par suite (form. 48^*):

$$\eta_0 = \ln\frac{\Theta(K' \mid K', iK)}{\Theta(0 \mid K', iK)} = \ln\frac{\Theta_1(0 \mid K', iK)}{\Theta(0 \mid K', iK)} = -\ln\sqrt{k}\ ;$$

ainsi, on en déduit finalement

$$z_A = -c \cdot \cos(\xi_0 + i\eta_0) = -4a\frac{\sqrt{k}}{1-k}\sin\left(i\ln\sqrt{k}\right) = 2ia, \quad \text{de même:} \quad z_B = -2ia.$$

2°. La deuxième valeur spéciale du paramètre ξ_0:

$$\xi_0 = \pi \tag{53}$$

(le cas $\xi_0 = 0$, comme il a été déjà mentionné plus haut, revient au même) doit être considérée comme le cas limite. Posons donc:

$$\xi_0 = \pi - \delta,$$

δ désignant une variable qui tend vers zéro. On obtient, par conséquent, dans la première approximation:

$$\chi \cong \nu\lambda = \delta \frac{K'}{\pi}$$

Mais, de là, résulte que les paramètres linéaires c, h, m, b et n augmentent indéfiniment.

C'est justement à cause de cela qu'il est utile, pour l'examen de ce cas, de faire transporter, dans les deux plans fondamentaux, celui des z et celui des t, les origines de coordonnées aux points F_2. En désignant les nouvelles variables complexes respectivement par z_1 et t_1, nous aurons:

$$z_1 = z - c \qquad \text{et} \qquad t_1 = t - h\,;$$

et en effectuant encore, dans le plan des ζ, une transformation analogue

$$\zeta_1 = \zeta - \pi\,,$$

c'est-à-dire en y transportant l'origine de coordonnées à la plus proche image du foyer F_2, nous pourrons donner à nos formules fondamentales la forme suivante:

$$z_1 = -c\,(1 - \cos\zeta_1) = -2\,c\sin^2\frac{\zeta_1}{2}\,; \quad \zeta_1 = -\int_o^{t_1} \frac{(t_1 + h - b)\,dt_1}{\sqrt{-t_1\,(2\,h + t_1)\,(t_1 + h - m)\,(t_1 + h - n)}}\,. \tag{54}$$

Dans cette expression, les différences:

$$\left.\begin{aligned} h - m &= 4\,a\,\frac{1 - k'^2\sin^2\chi}{k'^2\cos^2\chi}\,, \qquad h - n = 4\,a\,\frac{k^2}{k'^2\cos^2\chi}\,, \\ h - b &= 4\,a\,\frac{1 - k'^2\sin^2\chi}{k'^2\cos^2\chi}\left[1 - \frac{E\,(\chi, k') - \dfrac{E'}{K'}\,\nu\lambda}{\operatorname{tg}\chi\,\sqrt{1 - k'^2\sin^2\chi}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

comme on s'assure facilement, tendent pour $\chi \to 0$ respectivement vers les valeurs finies:

$$4\,a\,\frac{1}{k'^2}\,; \qquad 4\,a\,\frac{k^2}{k'^2}\,; \qquad \frac{4\,a}{k'^2}\cdot\frac{E'}{K'}\,. \tag{55*}$$

Par suite, pour des valeurs finies de la variable t_1, la variable auxiliaire ζ_1 a des valeurs infiniment petites, de l'ordre $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$; on peut donc écrire l'expression limite pour ζ_1 (en négligeant, en présence de l'unité, le terme de l'ordre $\dfrac{t_1}{h}$), comme il suit:

$$\zeta_1 \cong \frac{-1}{\sqrt{2\,h}} \int_o^{t_1} \frac{(t_1 + h - b)\,d\,t_1}{\sqrt{-t_1\,(t_1 + h - m)\,(t_1 + h - n)}}\,. \tag{56}$$

Il est à observer que ce n'est plus l'intégrale elliptique de troisième espèce, mais

celle de deuxième espèce, et en particulier — la même qui intervient dans la représentation conforme de l'arc symétrique de parabole (chap. I). En effet, ζ_1 étant infiniment petit, on peut remplacer $\sin \frac{\zeta_1}{2}$ tout simplement par $\frac{1}{2}\zeta_1$. Par suite, on peut écrire :

$$z_1 \cong -\frac{1}{2} c \zeta_1^2 .$$

Quant au paramètre c qui augmente indéfiniment, il vient de la formule (42^{**}):

$$\lim_{\chi = 0} \frac{c}{h} = 1 .$$

De cette façon, en portant encore dans la form. (56) les valeurs limites (55^{*}), précédemment trouvées, on obtient :

$$\sqrt{z_1} \cong \frac{1}{2} \int_o^{t_1} \frac{\left(t_1 + \frac{4a}{k'^2} \cdot \frac{E'}{K'}\right) dt_1}{\sqrt{t_1 \left(t_1 + 4a \frac{1}{k'^2}\right)\left(t_1 + 4a \frac{k^2}{k'^2}\right)}} .$$

On peut vérifier facilement que la formule ci-dessus ne présente autre chose que la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un segment de droite sur l'extérieur d'un arc symétrique de parabole, représentation étudiée en détail dans les deux premiers chapitres. Cela devient tout visible, si l'on y pose

$$\frac{t_1}{a} = t_2^2 .$$

Il vient alors

$$\sqrt{\frac{z_1}{a}} \cong \int_o^{t_2} \frac{\left(t_2^2 + \frac{4}{k'^2} \cdot \frac{E'}{K'}\right)}{\sqrt{\left(t_2^2 + \frac{4}{k'^2}\right)\left(t_2^2 + 4 \frac{k^2}{k'^2}\right)}} dt_2 ,$$

formule qui ne diffère de celles trouvées dans le chap. I que par les notations (il convient surtout d'insister sur ce que le module désigné ici par k a été, dans le chap. I, nommé k', et vice-versa.

3°. Il reste encore à examiner le problème étudié pour les valeurs extrêmes du module : $k = 0$ et $k = 1$.

Envisageons d'abord le cas :

$$k = 1 ; \qquad k' = 0 . \tag{57}$$

Les paramètres linéaires, examinés au numéro 2°, augmentant alors indéfiniment comme $\frac{1}{k'^2}$, il est utile de faire transporter, dans le plan de la variable complexe t, l'origine

de coordonnées à un point du segment MN. Mais, avant d'effectuer cette translation, nous allons montrer que dans ce plan des t le point réuni (A, B) vient pour $k = 1$ au milieu du segment considéré, c'est-à-dire que

$$\lim_{k=1} (b - m) = 2a.$$

À cet effet, en désignant, une fois pour toutes, par δ une variable infiniment petite, tendant vers zéro, posons:

$$k' = \delta. \tag{58}$$

En négligeant, dans la suite, en présence des termes finis, les termes de l'ordre de δ^2 et de l'ordre supérieur, nous pourrons écrire [1]):

$$K \cong \ln\frac{4}{\delta}; \quad K' \cong \frac{\pi}{2}; \quad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}} \cong \frac{\delta^2}{16}; \quad \sin\chi = \operatorname{sn}(v_\lambda \mid k') \cong \sin v_\lambda. \tag{59}$$

Il en résulte

$$Z(v_\lambda \mid K', iK) \cong \frac{2\pi}{K'} q' \sin\frac{\pi v_\lambda}{K'} \cong \frac{\delta^2}{4}\sin 2\chi, \tag{59*}$$

d'où (form. 36^{***});

$$\lim_{\delta=0} (b - m) = 2a. \tag{60}$$

Si nous portons maintenant dans la formule fondamentale (12) la transformation

$$t - b = t - m - 2a = t',$$

il vient

$$\zeta = \xi_0 + \int_m^t \frac{(b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)(m-t)(n-t)}} = \xi_0 - \int_{-2a}^{t'} \frac{t'\,dt'}{h\sqrt{(t'^2 - 4a^2)\left[1 - \left(\frac{t'}{h} + \frac{m}{h} + \frac{2a}{h}\right)^2\right]}}.$$

La variable complexe d'intégration t' prend, grâce à la transformation effectuée, exclusivement des valeurs finies, tandis que le paramètre

$$h = 8a\,\frac{1 - \delta^2\sin^2\chi}{\delta^2\sin^2 2\chi}$$

tend vers l'infini. On a donc:

$$\lim_{\delta=0}\left(\frac{t}{h} + \frac{m}{h} + \frac{2a}{h}\right) = \cos 2\chi,$$

et, par suite, il faut envisager pour ζ, dans ce cas, l'expression suivante:

$$\zeta \cong \xi_0 - \frac{\delta^2 \sin 2\chi}{8a}\int_{-2a}^{t} \frac{t'\,dt'}{\sqrt{t'^2 - 4a^2}} = \xi_0 - \frac{\delta^2\sin 2\chi}{8a}\sqrt{t'^2 - 4a^2};$$

---

[1]) Voir, p. ex., H. A. Schwarz, *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p. 53 et 54.

mais (form. 59) :

$$\chi \cong v_\lambda \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\xi_0}{2},$$

donc :

$$\zeta \cong \xi_0 - \frac{\delta^2 \sin \xi_0}{8\,a} \sqrt{t'^2 - 4\,a^2}\,. \tag{61}$$

En observant ensuite que $\lim\limits_{\delta=0} \Theta(2\,v_\lambda | K', i\,K) = 1$, on obtient que le paramètre c tend vers l'infini de la façon :

$$c \cong \frac{8\,a}{\delta^2 \sin^2 \xi_0}\,. \tag{62}$$

Par suite, sans tenir lieu des quantités infiniment petites, on trouve :

$$z = -c\,.\cos \zeta \cong -c\,.\cos \xi_0 - \sqrt{t'^2 - 4\,a^2}\,.$$

Évidemment, il convient, dans le plan des z, effectuer la translation du système de coordonnées au point $-c\,.\cos \xi_0$. On obtient alors en introduisant la nouvelle variable complexe z' :

$$z' = z + c\,.\cos \xi_0 \cong -\sqrt{t'^2 - 4\,a^2}\,. \tag{63}$$

C'est de nouveau la fonction de transformation d'un segment (MN) en un autre (AB), de la même longueur $4\,a$. Cela devient d'ailleurs tout naturel, si l'on observe que, dans le cas de k' tendant vers zéro, la longueur de la corde de l'arc d'hyperbole envisagé AB par rapport à la distance focale $2\,c$ devient infiniment petite, moindre que

$$\frac{4\,a}{2\,c} \cong \frac{\delta^2}{4} \sin^2 \xi_0\,.$$

Conformément à cela, on trouve : $\lim\limits_{\delta=0} \eta_0 = 0$.

4⁰. Envisageons enfin le cas limite

$$k = 0\,, \qquad k' = 1\,,$$

en posant d'une manière analogue au cas précédent :

$$k = \delta\,. \tag{64}$$

On a donc, en négligeant les termes infiniment petits de dégré supérieur à δ :

$$K \cong \frac{\pi}{2}, \qquad K' \cong \ln \frac{4}{\delta}, \qquad \sqrt[4]{q} = e^{-\frac{\pi K'}{4K}} \cong \frac{\sqrt{\delta}}{2}\,. \tag{65}$$

L'intégrale K' tendant vers l'infini, le paramètre v_λ augmente aussi indéfiniment, de la façon :

$$v_\lambda = \left(1 - \frac{\xi_0}{\pi}\right) K' \cong \ln \left(\frac{4}{\delta}\right)^{1 - \frac{\xi_0}{\pi}}. \tag{65*}$$

Remarquons que l'on peut supposer ici

$$\frac{\pi}{2} < \xi_0 < \pi ,$$

car les cas $\xi_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\xi_0 = \pi$ ont été étudiés précédemment. Ainsi, on peut écrire, en conservant toujours le même dégré d'approximation:

$$\sin \chi = \operatorname{sn}(v_\lambda \mid k') = -i \frac{\operatorname{sn}(i v_\lambda \mid k)}{\operatorname{cn}(i v_\lambda \mid k)} \cong -i \operatorname{tg}(i v_\lambda) = \operatorname{Tgh} v_\lambda \cong 1 - 2 \left(\frac{\delta}{4}\right)^{2 - \frac{2 \xi_0}{\pi}} . \tag{66}$$

On en voit que l'amplitude χ tend vers $\frac{\pi}{2}$, mais plus lentement que le module $k = \delta$ vers zéro. Par suite:

$$\lim_{\delta=0} h = 2 a ; \qquad \lim_{\delta=0} m = -2 a ; \qquad \lim_{\delta=0} n = 2 a . \tag{67}$$

En observant ensuite que le produit $q e^{2 v_\lambda}$ tend vers zéro, on trouve facilement (voir les form. 59 et 59*) que la fonction $Z(i v_\lambda \mid K, iK')$ tend également vers zéro; il résulte de là (form. 36*):

$$\lim_{\delta=0} b = 2 \left(2 \frac{\xi_0}{\pi} - 1\right) a . \tag{67*}$$

D'autre part, d'après les formules (47) et (66), on trouve:

$$\frac{1}{\sin \gamma} \cong \sin \chi \left(1 + \frac{2 \pi}{\xi_0} e^{-2 v_\lambda}\right) \cong \sin \chi \left[1 + \frac{2\pi}{\xi_0} \left(\frac{\delta}{4}\right)^{2 - \frac{2 \xi_0}{\pi}}\right] .$$

L'amplitude γ tend donc, de même que χ, vers $\frac{\pi}{2}$ — et aussi plus lentement que δ vers zéro. Ensuite, on y a:

$$\sin \gamma \cong \operatorname{Tgh} v_0 ,$$

formule que l'on déduit d'une même manière que celle: $\sin \chi = \operatorname{Tgh} v_\lambda$. Ainsi, on obtient:

$$\operatorname{Ctgh} v_0 \cong \operatorname{Tgh} v_\lambda \left(1 + \frac{2 \pi}{\xi_0} e^{-2 v_\lambda}\right),$$

d'où:

$$\frac{e^{-2 v_\lambda} + e^{-2 v_0}}{1 - e^{-2 v_\lambda} - e^{-2 v_0} + e^{-2 v_\lambda - 2 v_0}} \cong \frac{\pi}{\xi_0} e^{-2 v_\lambda} .$$

Il en résulte:

$$\lim_{\delta=0} (2 v_0 - 2 v_\lambda) = \ln \frac{\xi_0}{\pi - \xi_0} . \tag{68}$$

On voit donc que les quantités v_0 et v_λ tendent simultanément vers l'infini de sorte que leur différence s'approche de la valeur finie $\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0}{\pi - \xi_0}$. Cela nous permet déjà

d'examiner le mode de variation de la coordonnée elliptique η_0:

$$\eta_0 \cong -2\left(1-\frac{\xi_0}{\pi}\right)v_0 + \ln\frac{\operatorname{Cosh}(v_\lambda + v_0)}{\operatorname{Cosh}(v_\lambda - v_0)} \cong -2\left(1-\frac{\xi_0}{\pi}\right)v_0 + \ln\frac{e^{v_\lambda + v_0}}{e^{v_\lambda - v_0} + e^{v_0 - v_\lambda}} =$$

$$\cong -2\left(1-\frac{\xi_0}{\pi}\right)v_0 + v_\lambda + v_0 - \ln\left(\sqrt{\frac{\pi-\xi_0}{\xi_0}} + \sqrt{\frac{\xi_0}{\pi-\xi_0}}\right) =$$

$$\cong 2\frac{\xi_0}{\pi}v_0 - \ln\frac{\pi}{\pi-\xi_0} \cong 2\frac{\xi_0}{\pi}v_\lambda + \frac{\xi_0}{\pi}\ln\frac{\xi_0}{\pi-\xi_0} - \ln\frac{\pi}{\pi-\xi_0}. \tag{69}$$

Cette coordonnée η_0 augmente donc indéfiniment, néanmoins les coordonnées rectilignes, x et y, des extrémités de notre arc AB restent finies, car simultanément tend vers zéro le paramètre c. En effet, sous les conventions admises, il s'ensuit de la formule (42*):

$$\frac{c}{h} \cong i\sqrt{\delta}\, e^{2\left(1-\frac{\xi_0}{\pi}\right)v_\lambda} \cdot \frac{4\operatorname{Tgh} v_\lambda}{i\sqrt{\delta}\, e^{2v_\lambda}} \cong 4\, e^{-2\frac{\xi_0}{\pi}v_\lambda},$$

ou bien

$$c \cong 8\, a\, e^{-2\frac{\xi_0}{\pi}v_\lambda}. \tag{70}$$

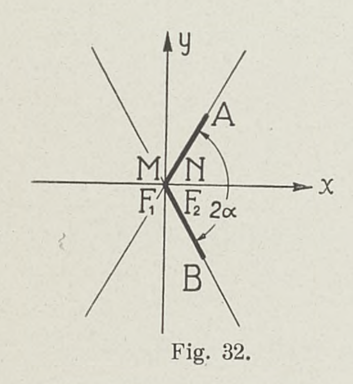


Fig. 32.

Le résultat concernant le paramètre c indique que le cas étudié ici est celui, où l'hyperbole envisagée dégénère en ses asymptotes et, par conséquent, l'arc AB — en une ligne brisée, composée des deux segments de droite, $(M,N)A$ et $(M,N)B$, formant l'angle (voir la form. 43): $2\alpha = 2\pi - 2\xi_0$ (fig. 32).

En revenant maintenant à la recherche de la coordonnée z_A de l'extrémité A de cet arc dégénéré, nous trouverons d'après les form. (69 et 70):

$$z_A = -c\,.\cos(\xi_0 + i\eta_0) \cong -8\,a\,e^{-2\frac{\xi_0}{\pi}v_\lambda}(\cos\xi_0 \operatorname{Cosh}\eta_0 - i\sin\xi_0 \operatorname{Sinh}\eta_0) =$$

$$\cong 4\,a\,e^{-2\frac{\xi_0}{\pi}v_\lambda + \eta_0}(-\cos\xi_0 + i\sin\xi_0);$$

mais :

$$-2\frac{\xi_0}{\pi}v_\lambda + \eta_0 \cong \frac{\xi_0}{\pi}\ln\frac{\xi_0}{\pi-\xi_0} - \ln\frac{\pi}{\pi-\xi_0};$$

d'où :

$$z_A = 4\,a\,\frac{\pi-\xi_0}{\pi}\left(\frac{\xi_0}{\pi-\xi_0}\right)^{\frac{\xi_0}{\pi}}(-\cos\xi_0 + i\sin\xi_0). \tag{71}$$

Cette formule nous montre, d'une part, que lorsque le paramètre ξ_0 s'approche de $\frac{\pi}{2}$, la coordonnée complexe de l'extrémité A tend vers la valeur $2ia$; d'autre part,

si ξ_0 s'approche de l'autre valeur extrême π, il vient:

$$\lim_{\xi_0 = \pi} z_A = 4\,a\,, \qquad \text{car} \qquad \lim_{\delta = 0} \delta^{\delta} = 1\,.$$

Ces résultats s'accordent entièrement avec l'analyse présentée dans les numéros précédents: 1° et 2°.

Ainsi, nous pouvons terminer la discussion en indiquant sommairement que le paramètre ξ_0 détermine l'angle 2α formé par les asymptotes de l'hyperbole sur laquelle est situé l'arc envisagé AB, tandis que le module k influe sur le rapport de la grandeur de cet arc AB à la distance $2c$ des foyers de cette hyperbole: lorsque k croît de 0 à 1, ce rapport diminue de ∞ jusqu'à 0. Autrement dit, pour obtenir des grands arcs d'hyperbole (relativement à la distance des foyers), il faut choisir les petites valeurs de k, et pour disposer des petits arcs — les valeurs de k voisines de l'unité.

CHAPITRE V.

Représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un segment de droite sur l'extérieur d'un arc symétrique d'ellipse.

Envisageons maintenant, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, au lieu de la famille des hyperboles homofocales la famille des ellipses dont les foyers F_1 et F_2 sont situés en ces mêmes points $(z = \mp c)$ que précédemment.

Tout d'abord, il faut observer que dans le cas des ellipses — tout autrement que dans le cas des hyperboles que nous venons d'étudier — il y a à distinguer deux genres des arcs symétriques: les uns, symétriques par rapport au grand axe—nous les appellerons *arcs périfocaux* (fig. 33); et les autres, symétriques par rapport au petit axe — *arcs péricentraux* (fig. 35).

1. Cas de l'arc périfocal.

Nous allons commencer par l'étude de la représentation des arcs du premier genre: *arcs périfocaux*. La méthode servant à la recherche de cette représentation sera tout analogue à celle concernant les arcs symétriques d'hyperbole. Cela nous dispense d'entrer dans le détail.

Soit donc donné sur une des ellipses en question un arc symétrique périfocal AB situé du côté du foyer F_2 $(z = +c)$. Nous introduirons, de même que dans le chapitre précédent, la représentation conforme du plan des z sur celui des $\zeta = \xi + i\eta$, définie par la formule:

$$\zeta = \arccos\left(-\frac{z}{c}\right) = \frac{\pi}{2} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}}, \tag{1}$$

où il faut prendre cette détermination du radical qui est positive au point $z = 0$.

Dans le plan des ζ, à l'arc AB correspondent deux séries des segments situés sur les deux droites parallèles à l'axe réel: $\eta = \pm \eta_0$. Leur configuration est expliquée par la fig. 33. Nous y avons désigné par ξ_0 la plus petite valeur positive des abscisses des images des points A et B.

Nous allons transformer ensuite ces segments de façon à obtenir une infinité des couples identiques des segments MN, parallèles à l'axe imaginaire, et se trouvant au-dessus et au-dessous des images du deuxième foyer F_2 (voir le plan de la variable complexe τ — fig. 33). La transformation cherchée est donnée par la formule analogue

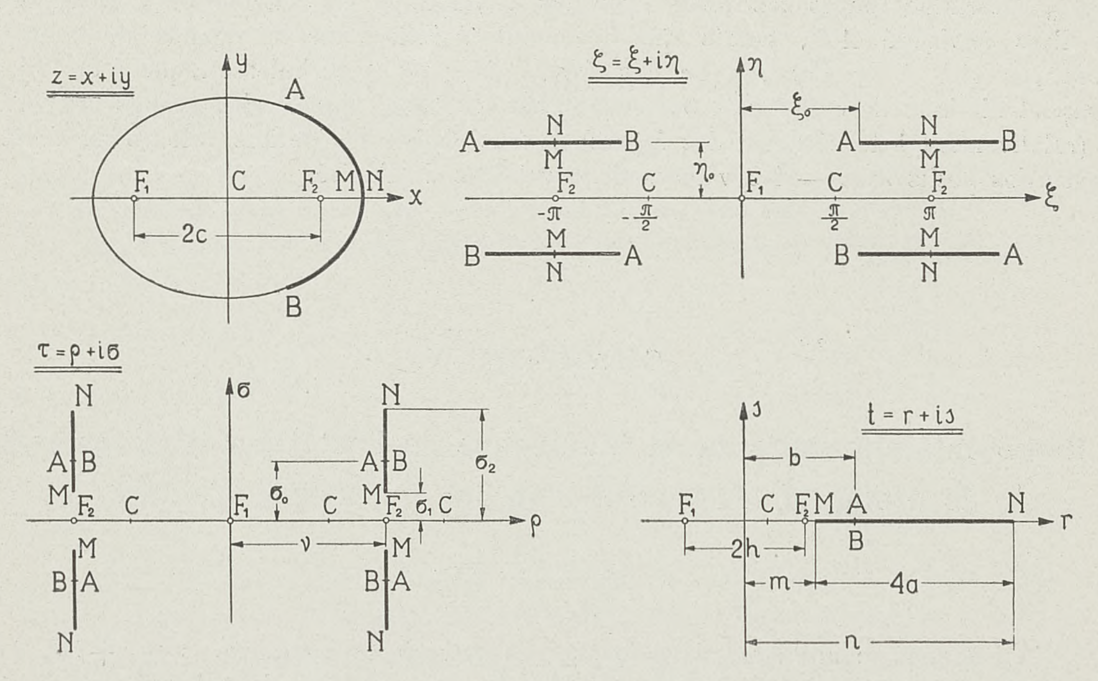


Fig. 33.

à celle que nous avons obtenue dans le chapitre précédent (form. 6); nous l'écrirons tout de suite sous sa forme la plus simple:

$$\zeta = C_1 \int_o^\tau \frac{\cos i \frac{\pi}{\nu} \sigma_0 + \cos \frac{\pi}{\nu} \tau}{\sqrt{\left(\cos i \frac{\pi}{\nu} \sigma_1 + \cos \frac{\pi}{\nu} \tau\right)\left(\cos i \frac{\pi}{\nu} \sigma_2 + \cos \frac{\pi}{\nu} \tau\right)}}\, d\tau . \tag{2}$$

Il suffit maintenant d'appliquer la transformation inverse à (1), savoir:

$$t = -h \cos \frac{\pi}{\nu} \tau , \tag{3}$$

pour revenir immédiatement à un simple plan de la variable complexe $t = r + is$, ne contenant qu'un seul segment de droite MN, image de l'arc AB, choisi dans le plan de la variable complexe z.

En portant cette variable t dans la formule (2), nous parvenons à exprimer la représentation cherchée à l'aide des deux formules seulement:

$$z = -c \, . \cos \zeta \qquad \text{et} \qquad \zeta = \int_{-h}^{t} \frac{(b-t)\, dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)(m-t)(n-t)}} , \tag{4}$$

où nous avons posé, de même que dans le chap. IV,

$$C_1 \frac{\nu}{\pi} = 1 \ , \tag{5}$$

sans quoi on ne pourrait satisfaire à la condition:

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ z=\infty}} \frac{z}{t} = 1 \ . \tag{6}$$

Quant à la détermination du radical dans la formule (4), il y faut envisager celle qui est positive pour $t=0$.

Ainsi, nous sommes arrivés aux mêmes formules que dans le cas de l'arc d'hyperbole (voir le chap. IV, form. 12). Ce qui distingue ce cas du cas précédent, c'est une autre succession des paramètres: m, b, n et h, rangés suivant leurs valeurs relatives. Dans le cas de l'arc d'hyperbole, nous avons eu:

$$-h < m < b < n < h$$

tandis que maintenant (fig. 33):

$$0 < h < m < b < n \tag{7}$$

En passant à l'analyse de cette représentation conforme, il convient, de même que dans le cas précédent, d'introduire les fonctions *Thêta* de Jacobi.

A cet effet, en tenant compte de l'ordre dans lequel suivent maintenant les points F_1, F_2, M et N, nous effectuons d'abord la transformation homografique

$$T = \frac{m+h}{m-h} \cdot \frac{t-h}{t+h} \ , \tag{8}$$

inverse à celle qui a été appliquée dans le chapitre IV (form. 13). On en voit (fig. 34) que, dans le plan des T, l'image de l'infini $t=\infty$ se trouve au point Λ:

$$T_\Lambda = \frac{m+h}{m-h}; \tag{9}$$

réciproquement, l'image du foyer F_1 vient à l'infini $T=\infty$, tandis que l'image du foyer F_2 vient à l'origine de coordonnées; quant aux images des points M et N, ils se trouvent respectivement aux points:

$$T_M = +1 \qquad \text{et} \qquad T_N = +\frac{1}{k^2} \ ,$$

où:

$$k = +\sqrt{\frac{m-h}{m+h} \cdot \frac{n+h}{n-h}} \ . \tag{10}$$

On voit donc (et il importe de songer à cela dans tout ce paragraphe) que le symbole k désigne ici une autre expression que dans le chapitre IV, à savoir: l'expression k, correspondant au cas d'un arc d'ellipse périfocal, est inverse à celle qui correspond au cas d'un arc d'hyperbole (voir la form. 14 du chap. IV).

Remarquons encore que, étant $h < m < n$, l'expression k est réelle, positive et plus petite que l'unité:

$$0 < k < 1 \ , \tag{10'}$$

ce que l'on vérifiera immédiatement en écrivant:

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{2h(n-m)}{(m+h)(n-h)}. \tag{11}$$

Introduisons ensuite la transformation

$$W = \sqrt{T}\ , \tag{12}$$

en prenant cette détermination du radical qui est positive pour T réel et positif. Cette fonction transforme le plan des T, coupé le long de l'axe des quantités réelles et négatives, en un demi-plan positif. Si l'on applique enfin la transformation

$$\operatorname{sn}(w\,|\,k) = \operatorname{sn}(w\,|\,K, iK') = W = \sqrt{\frac{m+h}{m-h}\cdot\frac{t-h}{t+h}},\ ^{1)} \tag{13}$$

on parvient à la représentation conforme des aires envisagées sur le demi-rectangle fondamental, de sommets $+iK'$, $K+iK'$, $K-iK'$ et $-iK'$. On y a, en général:

$$w = F(\arcsin W, k)\,. \tag{13*}$$

La détermination à prendre est bien distinguée sur la fig. 34. Remarquons en outre que nous y avons désigné par u_λ l'abscisse commune des deux points Λ correspondant

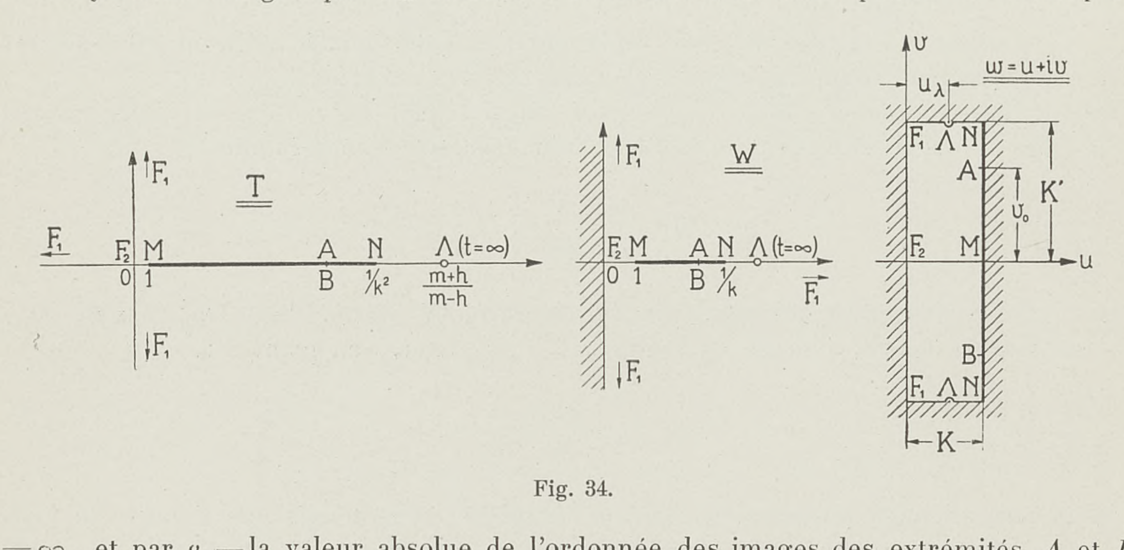


Fig. 34.

à $t = \infty$, et par v_0 — la valeur absolue de l'ordonnée des images des extrémités A et B de l'arc d'ellipse envisagé. Or, on a d'après la form. (13):

$$\operatorname{sn}(u_\lambda \pm iK') = +\sqrt{\frac{m+h}{m-h}},$$

d'où

$$\operatorname{sn} u_\lambda = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m-h}{m+h}} = +\sqrt{\frac{n-h}{n+h}}\,, \tag{14}$$

et

$$t = h\,\frac{\dfrac{m+h}{m-h} + T}{\dfrac{m+h}{m-h} - T} = h\,\frac{1 + k^2 \operatorname{sn}^2 u_\lambda \operatorname{sn}^2 w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_\lambda \operatorname{sn}^2 w}\,. \tag{15}$$

---

[1]) **Le module k sera souvent mis à côté — dans la suite, toutes les fois qu'il sera supprimé, cela signifiera que les formules se rapportent au module k.**

Introduisons encore l'amplitude χ de $(u_\lambda | k)$:

$$\chi = \operatorname{am}(u_\lambda | k), \qquad 0 < \chi < \frac{\pi}{2}, \tag{16}$$

d'où :

$$\sin\chi = \operatorname{sn}(u_\lambda | k) = \sqrt{\frac{n-h}{n+h}} \qquad \text{et} \qquad u_\lambda = \int_0^\chi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\chi, k), \tag{16*}$$

et désignons, comme dans tout ce qui précède, par $4a$ la longueur du segment primitif MN, sur l'extérieur duquel est représenté l'extérieur de l'arc d'ellipse AB:

$$4a = n - m. \tag{17}$$

Or, en fonction de trois paramètres, k, χ et a, on peut déjà exprimer tous les autres paramètres. D'abord:

$$h = \frac{2a}{k'^2}(1 - k^2\sin^2\chi)\operatorname{ctg}^2\chi; \quad m = \frac{2a}{k'^2}(1 + k^2\sin^2\chi)\operatorname{ctg}^2\chi; \quad n = 2a\frac{(1-k^2\sin^2\chi)(1+\sin^2\chi)}{k'^2\sin^2\chi}. \tag{18}$$

Ensuite, pour obtenir les relations déterminant les deux autres paramètres, b et c, transformons l'intégrale (4) en y introduisant la variable w. D'après la formule (15), on trouve:

$$\zeta = i\left(\frac{b}{h} - 1\right)\frac{\operatorname{cn}u_\lambda \operatorname{dn}u_\lambda}{\operatorname{sn}u_\lambda}(w - iK') - 2ik^2\operatorname{sn}u_\lambda\operatorname{cn}u_\lambda\operatorname{dn}u_\lambda\int_{iK'}^{w}\frac{\operatorname{sn}^2 w\, dw}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u_\lambda \operatorname{sn}^2 w}. \tag{19}$$

Le deuxième membre contient l'intégrale de troisième espèce sous la forme que Jacobi désigne par la notation $\Pi(w, u_\lambda) - \Pi(iK', u_\lambda)$. Or, comme on sait[1]), cette intégrale s'exprime très simplement par les fonctions *thêta*:

$$\Pi(w, u_\lambda) = k^2\operatorname{sn}u_\lambda\operatorname{cn}u_\lambda\operatorname{dn}u_\lambda\int_0^w\frac{\operatorname{sn}^2 w\, dw}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_\lambda\operatorname{sn}^2 w} = \frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u_\lambda - w)}{\Theta(u_\lambda + w)} + w\frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)}. \tag{20}$$

Évidemment, il y faut prendre zéro comme la valeur initiale du logarithme pour $w = 0$ et ensuite le prolonger par continuation. Le choix correct de l'argument de ce logarithme est bien facilité par l'analyse présentée dans le chapitre précédent et concernant la variation des fonctions $\mathrm{H}(w)$ et $\Theta(w)$ (voir, en particulier, les fig. 31 et 31*).

Remarquons que l'on peut exprimer l'intégrale (20) aussi bien à l'aide de la fonction H au lieu de Θ; il suffit de faire usage de la formule

$$\ln\frac{\Theta(u_\lambda - w)}{\Theta(u_\lambda + w)} = -\frac{i\pi}{K}w + \ln\frac{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda - w)}{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda + w)} \tag{21}$$

---

[1]) P. Appell et E. Lacour, l. c., p. 276.

qui est une conséquence immédiate de la relation bien connue[1]), liant ces fonctions:

$$\Theta(w) = -i e^{\frac{i\pi}{4K}(2w + iK')} \mathrm{H}(w + iK'). \tag{21*}$$

Par suite, la variable ζ s'exprimera comme il suit:

$$\zeta = \pi - \frac{\pi}{K}(w + u_\lambda) + i \left[\left(\frac{b}{h} - 1 \right) \frac{\operatorname{cn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda}{\operatorname{sn} u_\lambda} - 2 \frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)} \right] (w - iK') - i \ln \frac{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda - w)}{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda + w)}, \tag{22}$$

où il importe de songer à ce qu'il y faut toujours éviter les points critiques logarithmiques $w = \pm iK' \pm u_\lambda$ en les entourant du côté de l'intérieur du demi-rectangle fondamental (voir la fig. 34).

On déduit immédiatement de la formule (22) que, pour satisfaire à la condition d'uniformité

$$\zeta_M = \zeta_N \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \zeta(K) = \zeta(K \pm iK'),$$

il faut et il suffit qu'il soit:

$$\frac{b}{h} = 1 + \frac{2 \operatorname{sn} u_\lambda}{\operatorname{cn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda} \left[\frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)} + \frac{\pi u_\lambda}{2KK'} \right], \tag{23}$$

car (voir la fig. 31): $\ln \dfrac{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda - K)}{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda + K)} = i\pi$ et $\ln \dfrac{\mathrm{H}(u_\lambda - K)}{\mathrm{H}(2iK' + u_\lambda + K)} = -\pi \dfrac{K'}{K} + i\pi \left(1 + \dfrac{u_\lambda}{K}\right)$.

Par suite, en portant l'expression (23) dans la formule (22), on obtient:

$$\zeta = \pi - \frac{\pi}{K}\left(1 - i \frac{u_\lambda}{K'}\right) w - i \ln \frac{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda - w)}{\mathrm{H}(iK' + u_\lambda + w)}, \tag{24}$$

ou encore (voir la form. 21):

$$\zeta = \pi + i \frac{\pi u_\lambda}{KK'} w - i \ln \frac{\Theta(u_\lambda - w)}{\Theta(u_\lambda + w)}. \tag{24*}$$

D'après ces formules, on a:

$$\zeta_M = \zeta_N = \pi + i \frac{\pi u_\lambda}{K'}. \tag{25}$$

Comme la valeur absolue de l'ordonnée η des points M et N a été désignée auparavant par η_0, on a donc:

$$\frac{\pi u_\lambda}{K'} = \eta_0, \qquad \text{d'où:} \qquad u_\lambda = \frac{K'}{\pi} \eta_0. \tag{26}$$

Il est à remarquer ici que le paramètre $u_\lambda = F(\chi, k)$ étant au plus égal à K, le paramètre η_0 ne peut obtenir des valeurs plus grandes que $\dfrac{\pi K}{K'}$.

[1]) l. c., p. 487.

Notons encore qu'il résulte immédiatement des formules (24) et 24*):

$$\zeta_{F_1} = \zeta(iK') = 0 \qquad \text{et} \qquad \zeta_{F_2} = \zeta(0) = \pi .$$

ce qui concorde avec notre hypothèse initiale (fig. 33).

Nous revenons maintenant encore une fois à la formule exprimant le paramètre b, pour mieux adapter celle-ci au calcul numérique. D'après la formule (cf. le chap. IV, form. 37**)

$$Z(u_\lambda \mid K, iK') = \frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)} = E(\chi, k) - \frac{E}{K} u_\lambda , \tag{27}$$

en tenant compte de la définition (16) et de la relation de Legendre, on transforme l'expression (23) en

$$\frac{b}{h} = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} \left[E(\chi, k) - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u_\lambda \right], \tag{28}$$

d'où :

$$b - m = \frac{4a}{k'^2} \left\{ -k^2 \cos^2 \chi + \operatorname{ctg} \chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi} \left[E(\chi, k) - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u_\lambda \right] \right\} \cdot \tag{28*}$$

Dans certains cas, il peut être utile d'exprimer ce paramètre en fonction du module complémentaire k' au lieu de k. En appliquant, à cet effet, la formule (37*), démontrée dans le chapitre précédent, on déduit de la form. (23):

$$\frac{b}{h} = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \chi + \frac{2i \operatorname{tg} \chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} Z(iu_\lambda \mid K', iK) \tag{29}$$

ou

$$b - m = 4a \left[1 + \frac{i}{k'^2} \operatorname{ctg} \chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}\; Z(iu_\lambda \mid K', iK) \right]. \tag{29*}$$

Passons maintenant à la dernière condition,

$$\lim_{\substack{z=\infty \\ t=\infty}} \left(\frac{z}{t}\right) = 1,$$

exprimant que la représentation conforme considérée doit devenir une identité au point à l'infini. Or, c'est quand le point w tend vers le point $iK' + u_\lambda$ ou vers le point $-iK' + u_\lambda$, que les points z et t s'éloignent vers l'infini. Remarquons qu'il est tout égal vers lequel de ces deux points Λ tend w — supposons donc, pour fixer les idées, que w tend vers $iK' + u_\lambda$. La variable complexe ζ augmente alors indéfiniment comme un logarithme. Par suite, en partant de la formule

$$z = -c \cdot \cos \zeta = -\frac{c}{2}(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta})$$

en trouve aisément:

$$\lim_{\substack{z=\infty \\ t=\infty}} \frac{z}{t} = \frac{c}{2} e^{\frac{\pi u_\lambda}{KK'}(u_\lambda + iK')} \Theta(2u_\lambda + iK') \lim_{\substack{t=\infty \\ w=u_\lambda + iK'}} \frac{1}{t \cdot \Theta(u_\lambda - w)} ;$$

ensuite, en faisant usage de la relation (41*) du chap. IV, et de plus, en tenant compte de la formule (15), on a:

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ w=u_\lambda+iK'}} \left[t\,.\,\Theta\,(u_\lambda - w)\right] = \frac{2h}{k} \cdot \frac{\mathrm{H}(-iK')\,\mathrm{H}(2u_\lambda + iK')}{\Theta(2u_\lambda + iK')\left[\mathrm{sn}^2 u_\lambda - \mathrm{sn}^2(u_\lambda + iK')\right]};$$

ainsi, après avoir effectué quelques transformations connues, on obtiendra:

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ z=\infty}} \frac{z}{t} = \frac{c}{4h} \cdot \frac{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^4 u_\lambda}{k\,\mathrm{sn}^2 u_\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2k'K}{\pi}}} \cdot \frac{\mathrm{H}^2(2u_\lambda)}{\Theta(2u_\lambda)}\, e^{\frac{\pi u^2_\lambda}{KK'}}.$$

Il en résulte la relation cherchée:

$$\frac{c}{h} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}} \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi u^2_\lambda}{KK'}}}{\mathrm{H}(2u_\lambda)} = \frac{1-k^2\sin^4\chi}{(1-k^2\sin^2\chi)\cos^2\chi} \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi u^2_\lambda}{KK'}}}{\Theta(2u_\lambda)}, \qquad (30)$$

ou encore sous la forme, plus commode dans certains cas:

$$\frac{c}{h} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}} \sqrt{\frac{2kk'K'}{\pi}} \cdot \frac{i}{\mathrm{H}(2iu_\lambda\,|\,K', iK)} =$$

$$= \frac{\cos^4\chi - k'^2\sin^4\chi}{(1-k^2\sin^2\chi)\cos^2\chi} \sqrt{\frac{2kK'}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Theta(2iu_\lambda\,|\,K', iK)}. \qquad (30^*)$$

Ainsi, toutes les conditions étant établies, on peut exprimer tous les paramètres par les deux paramètres indépendants (sans compter le paramètre $4a = n - m$); ce seront: k et un de trois paramètres suivants, χ, u_λ ou η_0, qui sont liés par les simples relations:

$$u_\lambda = F(\chi, k) \qquad \text{et} \qquad \eta_0 = \frac{\pi u_\lambda}{K'}. \qquad (26^*)$$

Parmi ces trois paramètres, χ, u_λ et η_0, c'est le paramètre η_0 qui a la plus simple signification géometrique. Si l'on désigne notamment par ε l'excentricité de l'ellipse dont une portion est formée par notre arc AB, on aura (voir le chap. IV, form. 4):

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Cosh}\,\eta_0}. \qquad (31)$$

Il importe de rappeler ici que la valeur du paramètre k étant fixée $(0 < k < 1)$, on peut choisir pour la valeur du paramètre χ chaque valeur de l'intervalle constant $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, tandis que les limites des intervalles pour les paramètres u_λ et η_0 dépendent de la valeur choisie du paramètre k (voir la form. 26*):

$$0 < u_\lambda < K; \qquad 0 < \eta_0 < \frac{\pi K}{K'}. \qquad (32)$$

Pour compléter enfin les formules déterminant la représentation étudiée, il faut encore établir l'expression pour la coordonnée parabolique ξ_0 qui fixe la position des extrémités A et B de notre arc sur l'ellipse $\eta = \eta_0$. Or, dans le plan des t, la coordonnée b de l'image commun de ces extrémités A et B est déterminée par les formules (28) ou (29). Par suite, en posant conformément à la fig. 34:

$$w_A = K + i v_0 \qquad \text{et} \qquad w_B = K - i v_0, \qquad (0 < v_0 < K'), \tag{33}$$

et en combinant la formule (13) avec (28), nous obtenons:

$$\mathrm{sn}^2 w_A = \mathrm{sn}^2 w_B = \frac{1}{k^2 \sin^2 \chi} \cdot \frac{E(\chi, k) - \dfrac{E}{K} u_\lambda + \dfrac{\pi u_\lambda}{2KK'}}{E(\chi, k) - \dfrac{E}{K} u_\lambda + \dfrac{\pi u_\lambda}{2KK'} + \operatorname{ctg}\chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}.$$

Donc, en désignant par γ l'amplitude de $(v_0 \mid k')$, on a:

$$\mathrm{sn}(v_0 \mid k') = \sin\gamma \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sn}^2(K \pm i v_0 \mid k) = \frac{1}{\mathrm{dn}^2 (v_0 \mid k')} = \frac{1}{1 - k'^2 \sin^2 \gamma}, \tag{34}$$

d'où:

$$\sin\gamma = \frac{1}{k'} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi - \frac{k^2 \sin 2\chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}{2\left[E(\chi, k) - \dfrac{E}{K} u_\lambda + \dfrac{\pi u_\lambda}{2KK'}\right]}}. \tag{35}$$

Après avoir trouvé l'amplitude γ, on détermine v_0 à l'aide des Tables de Legendre:

$$v_0 = F(\gamma, k'), \tag{36}$$

et ensuite les coordonnées elliptiques (form. 24*):

$$\xi_0 + i\eta_0 = \pi - \frac{\pi u_\lambda v_0}{KK'} + i \frac{\pi u_\lambda}{K'} - i \ln \frac{\Theta_1 (u_\lambda - i v_0)}{{}_1\Theta (u_\lambda + i v_0)}.$$

Ainsi, on retrouve la formule

$$\eta_0 = \frac{\pi u_\lambda}{K'},$$

et l'on obtient:

$$\xi_0 = \pi \left(1 - \frac{u_\lambda v_0}{KK'}\right) + \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1 (u_\lambda - i v_0)}{\Theta_1 (u_\lambda + i v_0)}, \tag{37}$$

le module de l'expression $\dfrac{\Theta_1 (u_\lambda - i v_0)}{\Theta_1 (u_\lambda + i v_0)}$ étant évidemment égal à l'unité comme le quotient des deux quantités imaginaires conjuguées. Observons encore que dans la formule précédente il faut attribuer à l'argument celle de ces valeurs qui est comprise entre 0 et π.

La formule (37) peut être présentée aussi sous la forme:

$$\xi_0 = \pi - \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1 (v_0 - i u_\lambda \mid K', iK)}{\Theta_1 (v_0 + i u_\lambda \mid K', iK)} \tag{37*}$$

qui montre que $\qquad 0 < \xi_0 < \pi.$

Les principales formules déduites plus haut sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Tableau de formules II.

$$z = -c \,.\, \cos\zeta\,; \qquad \zeta = \int_{-h}^{t} \frac{(b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)(m-t)(n-t)}}\,;$$

$$\zeta = \pi + i\,\frac{\pi u_\lambda}{KK'}\,w - i\ln\frac{\Theta\,(u_\lambda - w)}{\Theta\,(u_\lambda + w)}\,; \qquad w = F(\arcsin W,\, k)\,; \qquad W = \frac{1}{k\sin\chi}\sqrt{\frac{t-h}{t+h}}\,.$$

Paramètres primitifs: a, k et η_0.
Paramètres dérivés: ε, u_λ, χ, h, m, n, c, b et ξ_0.

$$\varepsilon = \frac{1}{\operatorname{Cosh}\eta_0}\,; \qquad u_\lambda = \frac{K'}{\pi}\,\eta_0\,; \qquad \chi = \operatorname{am}(u_\lambda \,|\, k)\,;$$

$$h = \frac{2a}{k'^2}(1 - k^2\sin^2\chi)\operatorname{ctg}^2\chi\,; \quad m = \frac{2a}{k'^2}(1 + k^2\sin^2\chi)\operatorname{ctg}^2\chi\,; \quad n = \frac{2a}{k'^2}\cdot\frac{(1-k^2\sin^2\chi)\,(1+\sin^2\chi)}{\sin^2\chi}\,;$$

$$c = \frac{2a}{k'^2}\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} : \frac{1-k^2\sin^4\chi}{\sin^2\chi}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi u^2_\lambda}{KK'}}}{\Theta(2u_\lambda)}\,;$$

$$b - m = \frac{4a}{k'^2}\left\{-k^2\cos^2\chi + \operatorname{ctg}\chi\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}\left[E(\chi,k) - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u_\lambda\right]\right\}\,;$$

$$\sin\gamma = \frac{1}{k'}\sqrt{1 - k^2\sin^2\chi - \frac{k^2\sin 2\chi\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}{2\left[E(\chi,k) - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u_\lambda\right]}}\,; \qquad v_0 = F(\gamma,\, k')\,;$$

$$\xi_0 = \pi - \operatorname{Arg}\frac{\Theta_1(v_0 - i\,u_\lambda \,|\, K',\, iK)}{\Theta_1(v_0 + i\,u_\lambda \,|\, K',\, iK)}\,.$$

Nous allons maintenant examiner très rapidement quelques cas de dégénérescence.
1°. Soit

$$\eta_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < k < 1\,.$$

Le paramètre K' étant fini, on a:

$$u_\lambda = 0\,, \qquad \chi = 0 \qquad \text{et} \qquad \zeta = \pi\,.$$

Pour expliquer ce cas, il faut supposer d'abord que les paramètres η_0, u_λ et χ diffèrent de zéro, et ensuite faire les tendre vers zéro. On obtient alors en négligeant les termes infiniment petits:

$$h \cong \frac{2a}{k'^2\chi^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2+3k^2}{k'^2}\,a\,; \qquad m \cong \frac{2a}{k'^2\chi^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2-3k^2}{k'^2}\,a\,; \qquad n \cong \frac{2a}{k'^2\chi^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4-3k^2}{k'^2}\,a\,.$$

On en voit que les paramètres linéaires h, m et n augmentent indéfiniment, toutefois de la façon que la distance entre le point F_2 et les points M et N reste finie. Comme en a simultanément

$$\lim_{\chi=o} \frac{c}{h}=1,$$

il en vient que la distance c entre les foyers F_1 et F_2 augmente, elle aussi, indéfiniment; par contre, la distance entre le foyer F_2 et le sommet de notre arc AB reste finie, car

$$\lim_{\chi=0} (c \operatorname{Cosh} \eta_0 - c) = \lim_{\chi=0} \frac{h\,\eta_0^{\,2}}{2} = \frac{a}{k'^2} \lim_{\chi=0} \frac{\eta_0^{\,2}}{\chi^2} = \frac{a\,\pi^2}{k'^2 K'^2}\,.$$

Ainsi, le foyer F_1 s'éloignant indéfiniment de l'arc AB, on reconnaît que cet arc dégénère en un arc symétrique de parabole, cas étudié en détail dans trois premiers chapitres.

Ce cas de dégénérescence est donc tout analogue au cas 2⁰ du chap. IV (voir p. 62), et — de même que là — on peut facilement vérifier la conclusion énoncée par le calcul direct, en transportant les origines de coordonnées dans les deux plans fondamentaux, celui des z et celui des t, aux points F_2, et en passant ensuite à la limite: $\chi=0$.

2⁰. Considérons maintenant le cas où le paramètre η_0 prend sa valeur la plus grande possible, mais encore compatible avec la valeur donnée du module k:

$$\eta_0 = \pi \frac{K}{K'}\,; \qquad (0 < k < 1);$$

il s'ensuit:

$$u_\lambda = K\,; \quad \chi = \frac{\pi}{2}\,; \quad h = m = b = 0\,; \quad n = 4a\,; \quad c = 2ae^{-\eta_0}\,; \quad \gamma = \frac{\pi}{2}\,; \quad \rho_0 = K'.$$

Mais ces résultats n'expliquent pas complètement le cas étudié, car le paramètre ξ_0 reste indéterminé. Comme on voit de la formule (37), la valeur de ce paramètre dépend alors de la manière dont s'approchent simultanément les paramètres u_λ et ρ_0 de ces valeurs extrêmes, K et K'. Pour examiner cette circonstance, il faut poser

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \delta\,,$$

et faire tendre ensuite la quantité δ vers zéro par valeurs positives. En négligeant — en présence des termes finis — tous les termes des degrés supérieurs à δ, nous pourrons écrire:

$$\sin\chi \cong 1\,; \qquad \sin 2\chi \cong 2\,\delta\,; \qquad u_\lambda \cong K - \frac{1}{k'}\,\delta\,; \qquad E(\chi, k) \cong E - k'\,\delta\,;$$

et par suite:

$$\sin^2\gamma \cong 1 - 2\frac{K'}{\pi}\cdot\frac{k^2}{k'}\,\delta\,, \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma \cong \sqrt{2\frac{K'}{\pi}\cdot\frac{k^2}{k'}\,\delta}\,,$$

d'où:

$$\rho_0 \cong K' - \sqrt{\frac{2K'}{\pi k'}\,\delta}\,.$$

Ainsi, on voit que le paramètre u_λ tend vers K infiniment plus rapidement que le paramètre v_0 vers K'. Il en résulte donc que l'argument de l'expression

$$\frac{\Theta_1(u_\lambda - i v_0)}{\Theta_1(u_\lambda + i v_0)} \cong \frac{\Theta_1(K - iK' - p_1\delta + i p_2\sqrt{\delta})}{\Theta_1(K + iK' - p_1\delta - i p_2\sqrt{\delta})} \cong e^{-\frac{i\pi p_1}{K}\delta} \frac{H(p_1\delta - i p_2\sqrt{\delta})}{H(-p_1\delta - i p_2\sqrt{\delta})} \cong +1$$

tend vers zéro (p_1 et p_2 désignent les quantités constantes et positives). Par suite, d'après la formule (37), il vient:

$$\lim_{\chi=\frac{\pi}{2}} \xi_0 = \lim_{\chi=\frac{\pi}{2}} \left(\pi - \eta_0 \frac{v_0}{K}\right) = 0 .$$

On reconnaît par cela que dans le cas étudié l'arc AB couvre tout le contour de l'ellipse envisagée $\left(\text{définie par son excentricité: } \varepsilon = 1 : \operatorname{Cosh} \pi \frac{K}{K'}\right)$. Ainsi, on parvient à la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'une ellipse sur l'extérieur du segment de droite.

Si l'on veut encore déduire de nos formules générales la formule déterminant la représentation conforme dans ce cas spécial, il faut partir de la formule (4). En y prenant, d'abord, comme point dont on commence l'intégration, le point N $(t = 4a)$ au lieu de F_1 $(t = 0)$, et en y portant, ensuite, les relations:

$$h = m = b = 0 ,$$

on peut écrire cette formule comme il suit:

$$\zeta = \pi + i\eta_0 - \int_{4a}^{t} \frac{dt}{\sqrt{t(4a - t)}} .$$

Pour simplifier le résultat final, introduisons encore la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur du segment considéré MN sur l'extérieur du cercle, se trouvant dans un nouveau plan de la variable complexe Z, et décrit de l'origine de coordonnées comme centre avec le rayon égal à a:

$$t = Z + \frac{a^2}{Z} + 2a .$$

En portant cette expression dans la formule précédente, nous obtenons:

$$\zeta = \pi + i\eta_0 + i \ln \frac{Z}{a} ,$$

d'où:

$$z = -c \, . \cos\zeta = c \operatorname{Cosh}\left(\eta_0 + \ln \frac{Z}{a}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{Z}{a} e^{\eta_0} + \frac{a}{Z} e^{-\eta_0}\right);$$

mais:

$$c = 2ae^{-\eta_0} ;$$

par suite:

$$z = Z + \frac{c^2}{4Z} = Z + \frac{a^2 e^{-2\eta_0}}{Z} .$$

On voit donc que ce n'est autre chose que la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur d'un cercle sur l'extérieur de notre ellipse. Les demi-axes de l'ellipse sont égales respectivement à $c \operatorname{Cosh} \eta_0$ et $c \operatorname{Sinh} \eta_0$, et le rayon du cercle générateur à $a = c \dfrac{\operatorname{Cosh} \eta_0 + \operatorname{Sinh} \eta_0}{2}$, c'est-à-dire à la moyenne entre les longueurs de ces demi-axes.

3°. Dans le cas

$$k = 1, \quad \left(k' = 0, \quad K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}\right), \qquad 0 < \chi < \frac{\pi}{2}, \qquad (0 < \eta_0 < +\infty),$$

non seulement les paramètres linéaires, h, m et n, mais également les différences, $m - h$ et $n - h$, augmentent indéfiniment.

Cela montre que le segment de droite MN est infiniment éloigné des images des foyers, F_1 et F_2. Les propriétés de la représentation conforme exigent que les mêmes relations existent dans l'autre plan fondamental, celui des z. Il en résulterait donc que l'arc examiné AB constitue une très petite partie du contour entier (alors infiniment long) de l'ellipse. De plus, cet arc d'ellipse AB doit dégénérer, dans le cas envisagé, en un segment de droite, car le rayon de courbure de l'ellipse, au sommet périfocal, étant égal au rapport du carré du petit axe au grand axe: $c \dfrac{\operatorname{Sinh}^2 \eta_0}{\operatorname{Cosh} \eta_0}$, augmente indéfiniment avec la distance focale $2c$.

On peut, d'ailleurs, vérifier cette conclusion directement.

Or [1]), il vient de la form. (28*):

$$\lim_{k=1} (b - m) = 2a .$$

Si nous effectuons donc, dans le plan des t, la translation du système de coordonnées:

$$t_1 = t - b ,$$

---

[1]) Soit $k' = \delta$, $k = \sqrt{1 - \delta^2}$, où δ désigne une petite quantité essentielement positive, tendant vers zéro. On trouve aisément, en négligeant les termes du degré supérieur à δ^2 :

$$E' \cong \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right); \qquad K' \cong \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right);$$

$$\frac{\pi u_\lambda}{2KK'} - \frac{E}{K} u_\lambda = \frac{u_\lambda}{KK'}\left(\frac{\pi}{2} - EK'\right) = u_\lambda\left(\frac{E'}{K'} - 1\right) \cong -\frac{\delta^2}{2} u_\lambda ;$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \delta^2 \sin^2 \varphi} \cong \cos \varphi \left(1 + \frac{\delta^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right);$$

$$u_\lambda = F(\chi, k) \cong \int_o^\chi \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) \ln \frac{1 + \sin \chi}{1 - \sin \chi} - \frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{\sin \chi}{\cos^2 \chi} ;$$

$$E(\chi, k) \cong \int_o^\chi \left(1 + \frac{\delta^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) \cos \varphi \, d\varphi = \sin \chi - \frac{\delta^2}{2} \sin \chi + \frac{\delta^2}{4} \ln \frac{1 + \sin \chi}{1 - \sin \chi} ;$$

d'où:

$$E(\chi, k) - \frac{E}{K} u_\lambda + \frac{\pi u_\lambda}{2KK'} = \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) \sin \chi ;$$

en portant ces expressions dans (28*), on obtient, en effet:

$$\lim_{\delta = 0} (b - m) = 2a .$$

et portons cette substitution dans la form. (4), en y transportant simultanément le commencement de l'intégration au point M $(t = m,\ t_1 = m - b = -2a)$, nous obtenons:

$$\zeta = \pi + i\eta_0 + \int_{-2a}^{t_1} \frac{-t_1\,dt_1}{\sqrt{(h+b+t_1)(h-b-t_1)(-2a-t_1)(2a-t_1)}}\,.$$

La variable t_1, dans toute région bornée entourant le segment MN, n'admet que des valeurs finies, tandis que les expressions, $|h+b|$ et $|h-b|$, augmentent indéfiniment — on peut donc écrire, dans la première approximation:

$$\zeta \cong \pi + i\eta_0 + \frac{1}{\sqrt{b^2-h^2}} \int_{-2a}^{t_1} \frac{t_1\,dt_1}{\sqrt{4a^2-t_1^2}} = \pi + i\eta_0 - \sqrt{\frac{4a^2-t_1^2}{b^2-h^2}}\,,$$

d'où:

$$z = -c\,.\cos\zeta \cong c\,.\cos\left(i\eta_0 - \sqrt{\frac{4a^2-t_1^2}{b^2-h^2}}\right) \cong c\,\mathrm{Cosh}\,\eta_0\left[1 - \frac{4a^2-t_1^2}{2(b^2-h^2)}\right] +$$

$$+ i\,c\,\mathrm{Sinh}\,\eta_0 \sqrt{\frac{4a^2-t_1^2}{b^2-h^2}}\,.$$

Mais (form. 28):

$$\lim_{k=1} \frac{b}{h} = 1 + 2\,\mathrm{tg}^2\chi\,;$$

et (form. 30*):

$$\lim_{k=1} \frac{c}{h} = 1\,.$$

Par suite:

$$\lim_{k=1} \frac{c}{\sqrt{b^2-h^2}} = \lim_{k=1} \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{h^2}-1}} = \frac{\cos^2\chi}{2\sin\chi} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k=1} \frac{c}{b^2-h^2} = 0\,.$$

Ainsi, on parvient à la formule limite cherchée:

$$z_1 = z - c\,\mathrm{Cosh}\,\eta_0 = i\,\mathrm{Sinh}\,\eta_0 \frac{\cos^2\chi}{2\sin\chi} \sqrt{4a^2-t_1^2}\,.$$

Mais, dans le cas envisagé, on a:

$$\eta_0 = 2u_\lambda = 2F(\chi, 1) = \ln\frac{1+\sin\chi}{1-\sin\chi}\,,$$

d'où:

$$e^{\eta_0} = \frac{1+\sin\chi}{1-\sin\chi} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sinh}\,\eta_0 = \frac{2\sin\chi}{\cos^2\chi}\,.$$

Par suite

$$z_1 = z - c\,\mathrm{Cosh}\,\eta_0 = \sqrt{t_1^2 - 4a^2}\,,$$

ce qui prouve déjà notre assertion.

Le cas étudié correspond à celui du chapitre IV qui y a été désigné par le même numéro 3⁰.

4⁰. Par contre, dans le cas limite:

$$k = 0\,, \qquad \left(k' = 1\,, \quad K = E = \frac{\pi}{2}, \quad E' = 1\,, \quad K' = \infty\right), \qquad 0 < \chi < \frac{\pi}{2},$$

l'arc envisagé AB entoure de plus proche le foyer F_2, en y se courbant de sorte que les deux parties, supérieure et inférieure, se rapprochent infiniment en formant un seul segment de droite. Ce cas ne constitue d'ailleurs qu'un cas particulier d'entre ceux qui ont été examinés au numéro 1⁰ ($\eta_0 = 0$). Tout cela résulte des formules limites suivantes:

$$h = m = 2a \operatorname{ctg}^2 \chi ; \qquad n = 2a \frac{1 + \sin^2 \chi}{\sin^2 \chi} ;$$

$$u_\lambda = F(\chi, 0) = \chi ; \qquad b = m ; \qquad c = \frac{2a}{\sin^2 \chi} ; \qquad \eta_0 = 0 .$$

Par suite, en transportant, dans la formule (4), le commencement de l'intégration du point F_1 ($t = -h$) au point $N(t = n)$, et en tenant compte des relations précédentes, on obtient:

$$\zeta = \pi + \int_n^t \frac{(m-t)\,dt}{\sqrt{(m^2 - t^2)(m-t)(n-t)}} = \pi + \int_n^t \frac{dt}{\sqrt{(n-2a)^2 - (t-2a)^2}} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sin} \frac{t - 2a}{n - 2a} ;$$

donc:

$$z = -c \,.\, \cos \zeta = c \cdot \frac{t - 2a}{n - 2a} = \frac{2a}{\sin^2 \chi} \cdot \frac{t - 2a}{2a} \sin^2 \chi = t - 2a .$$

Ainsi, notre représentation conforme se réduit, dans le cas $k = 0$, à une simple translation.

5⁰. Signalons enfin que dans le cas où les deux paramètres, χ et k, s'approchent simultanément de ses valeurs extrêmes, les plus grandes,

$$\chi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad k = 1 , \qquad (\text{alors: } \eta_0 = 2u_\lambda = 2K = \infty),$$

l'excentricité $\varepsilon = \dfrac{1}{\operatorname{Cosh} \eta_0}$ de l'ellipse, sur laquelle se trouve notre arc AB, s'annule; et par suite, cet arc dégénère en un arc de cercle.

Il est à remarquer que la valeur de l'angle central μ, correspondant à cet arc de cercle, dépend de la manière dont tendent simultanément les paramètres: χ vers $\dfrac{\pi}{2}$ et k vers 1 ; ou plus précisément, de la valeur limite du rapport

$$\lim_{\substack{\delta = 0 \\ k' = 0}} \frac{k'}{\delta} = g , \qquad \text{où: } \delta = \frac{\pi}{2} - \chi \qquad \text{et} \qquad k' = \sqrt{1 - k^2} .$$

C'est ainsi, le paramètre χ restant constant et égal à $\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\eta_0 = \pi \dfrac{K}{K'}\right)$, et le module k tendant vers 1 (on a alors $g = \infty$), que l'on parvient à l'arc de cercle, de l'angle central $\mu = 2\pi$, c'est-à-dire à la circonférence entière du cercle (cf. le n. 2⁰ de l'analyse précédente). Par contre, si c'est le paramètre k qui est constamment égal à 1 lorsque χ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ ($g = 0$), on est, à la limite, en présence du segment de droite (l'arc de cercle, de l'angle central μ égal à zéro — comparer le n. 3⁰). Cette dépendance entre l'angle μ et la limite g devient tout clair, si l'on déduit des formules (18) et (30*) l'expression limite pour le rayon de courbure ρ_f de l'arc périfocal, c'est-à-dire le rayon de l'arc de cercle en question; or on trouve en laissant de côté le cas déjà examiné, $g = 0$:

$$\rho_f = \lim_{\substack{\delta = 0 \\ k' = 0 \\ g \neq 0}} \left(c \frac{\operatorname{Sinh}^2 \eta_0}{\operatorname{Cosh} \eta_0} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{\delta = 0 \\ k' = 0}} (c\, e^{\eta_0}) = \frac{a}{2} \lim_{\substack{\delta = 0 \\ k' = 0}} \frac{e^{\pi \frac{u_\lambda}{K}}}{q' \operatorname{Cosh} 2\pi \dfrac{u_\lambda}{K'}} = a \lim_{\substack{\delta = 0 \\ k' = 0}} e^{2(K - u_\lambda)} .$$

Mais, avec l'approximation suffisante:

$$\lim_{\substack{\delta=0\\k'=0}}(K-u_\lambda)=\lim_{\substack{\delta=0\\k'=0}}\int_o^\delta\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi+k'^2\cos^2\varphi}}=\lim_{\substack{\delta=0\\k'=0}}\int_o^\delta\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+k'^2}}=\ln\frac{1+\sqrt{1+g^2}}{g};$$

donc:

$$\rho_f=a\left(\frac{1+\sqrt{1+g^2}}{g}\right)^2.$$

2. Cas de l'arc péricentral.

D'une manière analogue à celle qui a été appliquée à la recherche de la représentation conforme des arcs périfocaux, nous parvenons, dans le cas des arcs péricentraux aux formules suivantes:

$$z=-c\,.\cos\zeta\,; \qquad \zeta=\int_{-h}^{t}\frac{(i\,b-t)\,dt}{\sqrt{(h^2-t^2)\,(in-t)\,(im-t)}}\,; \tag{38}$$

quant à la détermination du radical, il faut prendre celle qui est purement imaginaire positive pour $t=0$.

La définition des paramètres introduits se trouve sur la fig. 35. En même temps, ce schéma de la représentation conforme explique nettement la configuration des points

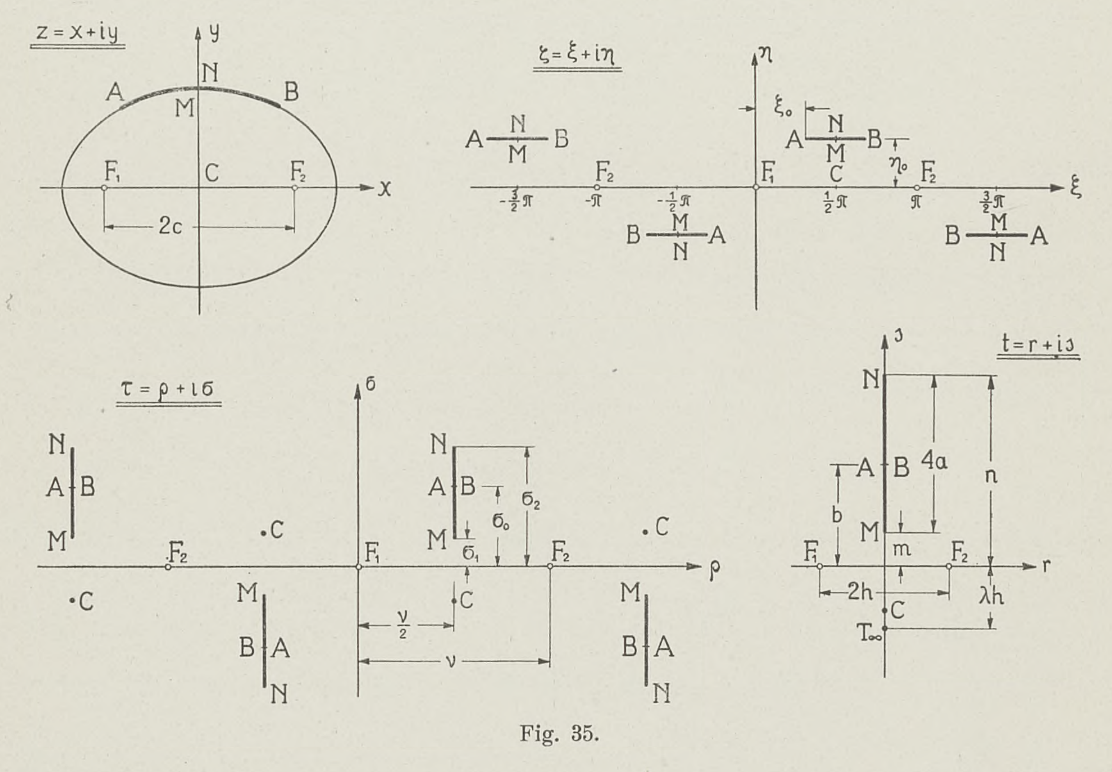


Fig. 35.

caractéristiques et de leurs images dans les différents plans; par là, est rendue bien facile la sélection correcte des déterminations des fonctions étudiées.

De même que dans les cas précédents, nous allons introduire maintenant les fonctions de Jacobi.

À cet égard, effectuons d'abord la transformation homographique suivante:

$$T=\frac{i\lambda\,t+h}{t+i\lambda\,h}\,; \qquad t=h\,\frac{1-i\lambda\,T}{T-i\lambda}\,; \tag{39}$$

Le paramètre introduit λ détermine la position de l'image Λ de l'infini $t = \infty$ sur l'axe de quantités purement imaginaires :

$$T_\Lambda = i\lambda .$$

Nous définissons ce paramètre par la condition que, dans le plan des T, les images des points M et N soient situés sur l'axe imaginaire, symétriquement par rapport à l'origine de coordonnées (fig. 36). De cette condition, on tire la relation :

$$\lambda = \frac{h^2 - mn + \sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)}}{h(m+n)} . \tag{40}$$

Désignons ensuite la valeur absolue des ordonnées de ces points, M et N, par le quotient $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k} = \dfrac{k'}{k}$; ainsi, on a :

$$T_M = -i\frac{k'}{k} \qquad \text{et} \qquad T_N = +i\frac{k'}{k} . \tag{41}$$

En regardant les quantités, k et k', essentielement positives et plus petites que l'unité, comme les modules des intégrales elliptiques complètes, $K = K(k)$ et $K' = K(k')$, nous posons enfin :

$$T = -\operatorname{cn}(w - iK' \mid K, iK') = -\operatorname{cn}(w - iK') , \tag{42}$$

ou

$$T = -i\frac{\operatorname{dn} w}{k \operatorname{sn} w} . \tag{42*}$$

Dans le plan de la nouvelle variable complexe, $w = u + iv$, il y a une infinité des rectangles correspondant à tout le plan de la variable T. Parmi ces rectangles, nous envisageons celui de sommets : $-2iK'$, $+K - 2iK'$, $+K + 2iK'$, $+2iK'$. La correspondance entre les points, T et w, est indiquée sur la fig. 36. On y voit, par exemple, que à la moitié supérieure de notre rectangle correspond le demi-plan négatif des t ($\Re(t) < 0$), et à sa moitié inférieure — le demi-plan positif des t.

Notons encore que, conformément à (41), on a :

$$w_M = K ; \qquad w_N = K \pm 2iK' . \tag{41*}$$

En y désignant, de plus, par u_λ l'abscisse des points correspondant à $t = \infty$, nous aurons :

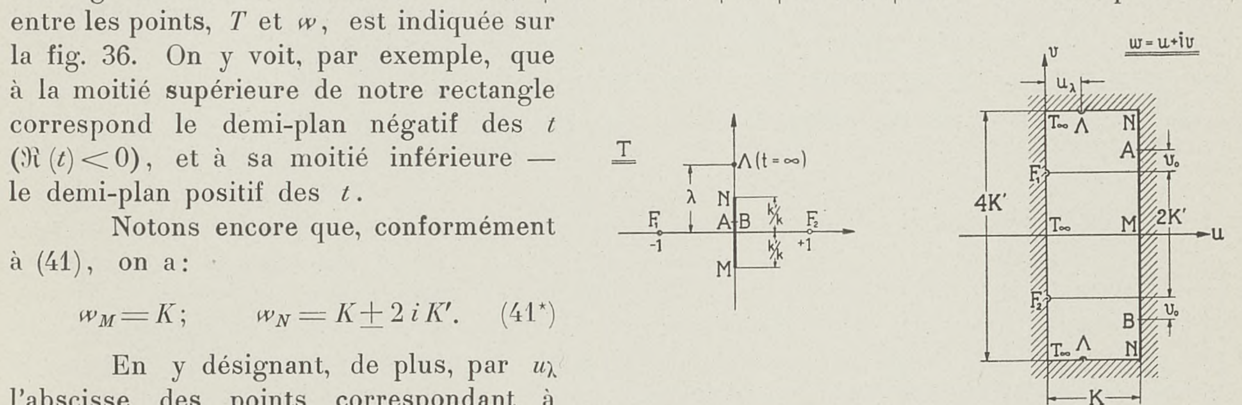


Fig. 36.

$$w_\lambda = u_\lambda \pm 2iK' \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\frac{\operatorname{dn}(u_\lambda \pm 2iK')}{k \operatorname{sn}(u_\lambda \pm 2iK')} = \frac{\operatorname{dn} u_\lambda}{k \operatorname{sn} u_\lambda} > \frac{k'}{k} ; \tag{43}$$

et ensuite (form. 39) :

$$t = \frac{ih}{k} \cdot \frac{k^2 \operatorname{sn}_\lambda \operatorname{sn} w - \operatorname{dn} u_\lambda \operatorname{dn} w}{\operatorname{dn} u_\lambda \operatorname{sn} w + \operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} w} = \frac{ih}{k} \cdot \frac{\operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda - \operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 u_\lambda} ; \tag{44}$$

inversement, il vient (form. 42 et 39) :

$$\operatorname{cn}(w - iK' \mid k) = -T = -\frac{i\lambda t + h}{t + i\lambda h} . \tag{45}$$

Pour en déterminer w, il faut d'abord, en posant

$$\operatorname{cn}(w - iK' \mid k) = \cos(\varphi + i\psi) , \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \varphi + i\psi = \operatorname{am}(w - iK' \mid k) , \tag{46}$$

trouver l'amplitude

$$\varphi + i\psi = \arc\cos\left(-\frac{i\lambda t + h}{t + i\lambda h}\right) \cdot \tag{47}$$

En vue de faciliter le choix correct des valeurs de arccos, nous joignons ci-contre la configuration des points caractéristiques dans le plan de cette variable complexe $\varphi + i\psi$. Évidemment, dans ce plan, il n'y a besoin que d'une bande, de la largeur égale à π; nous pouvons, par exemple, choisir la bande, limitée par les deux droites, parallèles à l'axe imaginaire: $\varphi = 0$ et $\varphi = +\pi$ (voir la fig. 37).

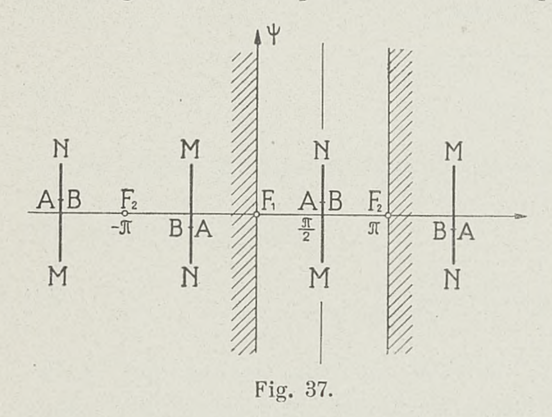


Fig. 37.

L'amplitude $\varphi + i\psi$ étant ainsi définie, on peut déjà déterminer la variable complexe w à l'aide des Tables de Legendre. En effet, d'après l'hypothèse (46), on a:

$$w = iK' + F(\varphi + i\psi, k). \tag{48}$$

À l'égard de ce calcul, les considérations du chapitre II (§ 8) font un bon service. Remarquons cependant que pour éviter toute ambiguïté, il convient de limiter encore davantage la région envisagée de la variable complexe $\varphi + i\psi$, savoir à la bande:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot$$

De cette façon, on traitera directement les points t^-, situés dans le demi-plan négatif (contenant le foyer F_1). Les points correspondants $w = u + iv$ remplissent le rectangle $(0, +K, +K + 2iK', +2iK')$ qui se trouve au-dessus de l'axe des u. Quant aux points t^+, situés dans le demi-plan positif, il suffit de trouver la valeur $w_1(t^-) = u_1 + iv_1$ correspondant au point t_1^-, symétrique de t_1^+ par rapport à l'axe de quantités purement imaginaires, et prendre ensuite la valeur imaginaire conjuguée (*cf.* fig. 36):

$$w_1(t^+) = u_1 - iv_1.$$

Ainsi, étant fixée sans aucune ambiguïté la correspondance biunivoque entre les points de tout le plan des t et les points situés à l'intérieur du rectangle fondamental du plan des w, il reste encore à établir la correspondance entre les points w de ce rectangle et les points ζ, situés dans un domaine connexe qui correspond d'une façon univoque à tout le plan des z.

À cet effet, portons l'expression (44) dans la formule fondamentale (38); nous trouverons successivement:

$$\sqrt{(h^2 - t^2)(in - t)(im - t)} = +\frac{ih^2}{k^2} \cdot \frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{cn} u_\lambda (\operatorname{dn} u_\lambda \operatorname{sn} w + \operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} w)^2};$$

$$dt = i\frac{h \operatorname{cn} w\, dw}{k(\operatorname{dn} u_\lambda \operatorname{sn} w + \operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} u)^2};$$

d'où:

$$\zeta = i \operatorname{cn} u_\lambda \int_{iK'}^{w} \left(k\frac{b}{h} + \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w - \operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 u_\lambda}\right) dw.$$

Or on vérifiera aisément que: $\displaystyle \operatorname{cn} u_\lambda \int_{iK'}^{w} \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 u_\lambda} dw = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{cn} w - \operatorname{cn} u_\lambda}{\operatorname{cn} w + \operatorname{cn} u_\lambda}$;

quant à la dernière intégrale, on a d'après la formule (23 — chap. IV):

$$\int_{iK'}^{w} \frac{\operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{cn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda}{\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 u_\lambda} d w = (w - i K') \frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)} + \frac{1}{2} \left| \ln \frac{\mathrm{H}(u_\lambda - w)}{\mathrm{H}(u_\lambda + w)} \right|_{iK'}^{w} .$$

Par suite:

$$\zeta = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{u_\lambda}{K}\right) + i(w - iK')\left[k\frac{b}{h}\operatorname{cn} u_\lambda - \frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)}\right] + \frac{i}{2}\ln\left[\frac{\mathrm{H}(u_\lambda + w)}{\mathrm{H}(u_\lambda - w)} \cdot \frac{\operatorname{cn} w - \operatorname{cn} u_\lambda}{\operatorname{cn} w + \operatorname{cn} u_\lambda}\right] \cdot \qquad (49)$$

Il convient d'observer ici que, *au dedans* du rectangle fondamental du plan des w, il n'y a pas des points critiques du logarithme qui figure dans la formule (49). En effet, ce n'est que le point *intérieur* $w = u_\lambda$ qui, à première vue, pourrait apparaître comme un tel point. Mais, en tenant compte du fait que, en ce point $w = u_\lambda$, la fonction

$$\operatorname{cn} w - \operatorname{cn} u_\lambda = \frac{u_\lambda^2 - w^2}{2!} - (1 + 4k^2)\frac{u_\lambda^4 - w^4}{4!} + \dots ,$$

ainsi que $\quad \mathrm{H}(u_\lambda - w) = 2\sqrt[4]{q}\, \sin\dfrac{\pi}{2K}(u_\lambda - w) - 2\sqrt[4]{q^9}\, \sin\dfrac{3\pi}{2K}(u_\lambda - w) + \cdots$

possèdent le zéro du *même* (premier) ordre, on s'assure immédiatement que *le point* $w = u_\lambda$ *est un point régulier* pour notre logarithme. Il en résulte que *chaque détermination de ce logarithme, constitue à l'intérieur du rectangle en question une fonction uniforme*. Remarquons que, des à présent, *nous choisirons toujours cette détermination qui obtient au point* $w = 0$ *la valeur principale du logarithme* (même, réelle et positive).

Grâce à cette convention, la formule (49) va nous fournir la représentation conforme et biunivoque du rectangle envisagé dans le plan des w sur une demi-bande des ζ. Cette demi-bande, d'une largeur variable, est limitée par une courbe infinie passant par l'origine de coordonnées F_1 et par cet image du foyer F_2 qui se présente le premier sur la partie positive de l'axe des ξ. Il est facile à vérifier que la courbe limitant la demi-bande en question coïncide ensuite avec les deux parallèles à l'axe imaginaire des η.

En tenant compte de ces remarques, nous allons satisfaire maintenant à la condition d'uniformité:

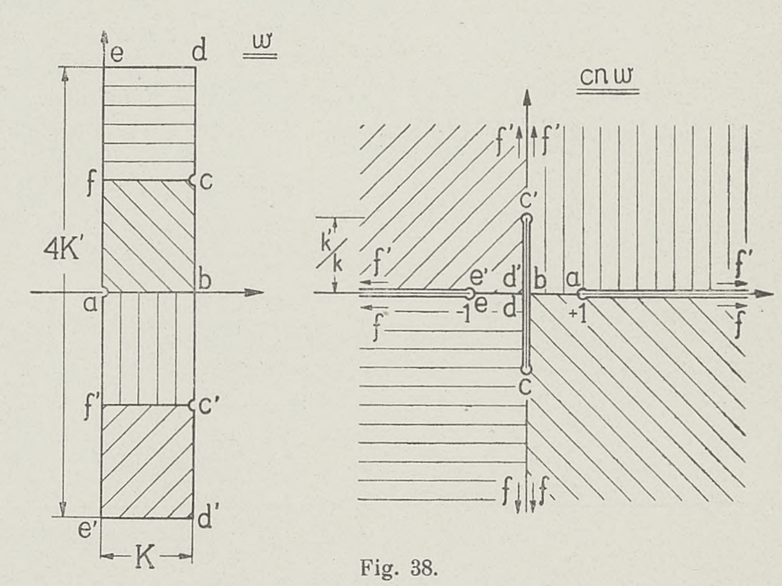


Fig. 38.

$$\zeta_M = \zeta_N \quad \text{c'est-à-dire:} \quad \zeta(K) = \zeta(K + 2iK') = \zeta(K - 2iK'). \qquad (50)$$

Pour faciliter davantage le choix correct de la détermination admise du logarithme, nous donnons ci-contre (fig. 38) le schéma de la variation de la fonction $\operatorname{cn} w$. En s'y référant

et en tirant encore parti de l'analyse précédente concernant la variation de la fonction H (voir p. 52 — 54 et la fig. 31), on trouve aisément:

$$\left.\begin{aligned}\zeta(K) &= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{u_\lambda}{K}\right)+i\,\mathrm{X}\,(K-iK'),\\ \zeta(K+2iK') &= \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{u_\lambda}{K}\right)+i\,\mathrm{X}\,(K+iK'),\\ \zeta(K-2iK') &= \frac{\pi}{2}\left(1-3\frac{u_\lambda}{K}\right)+i\,\mathrm{X}\,(K-3iK'),\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

où:

$$\mathrm{X}=k\,\frac{b}{h}\,\mathrm{cn}\,u_\lambda-\frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)}\,. \tag{51*}$$

Il s'ensuit donc de la condition (50) l'équation suivante:

$$\mathrm{X}=\frac{\pi\,u_\lambda}{2KK'}\,, \tag{51**}$$

d'où l'on tire immédiatement la relation déterminant le paramètre b:

$$\frac{b}{h}=\frac{1}{k\,\mathrm{cn}\,u_\lambda}\left[\frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)}+\frac{\pi\,u_\lambda}{2\,K\,K'}\right]. \tag{52}$$

Observons ici que l'ensemble des valeurs du paramètre b possède la borne inférieure égale à $\frac{h}{\lambda}\cdot$ Pour vérifier cela, formons l'expression:

$$f(u_\lambda, k)=\left(\frac{b}{h}-\frac{1}{\lambda}\right)k\,\mathrm{cn}\,u_\lambda\,.$$

D'après la formule (43), on a:

$$f(u,k)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}+\frac{\pi u}{2KK'}-\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\cdot$$

où nous avons omis l'indice λ pour simplifier l'écriture. Considérons ensuite la dérivée de cette fonction, prise par rapport à u:

$$\frac{d}{du}f(u,k)=f'(u,k)=\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}+\frac{\pi}{2KK'}-\mathrm{dn}^2 u+\frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2 u}\cdot$$

Or [1])

$$\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=\mathrm{dn}^2 u-\frac{E}{K}\cdot$$

Par suite:

$$f'(u,k)=\frac{\pi}{2KK'}-\frac{E}{K}+\frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2 u}\,,$$

ou, d'après la relation:

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}\,,$$

il vient

$$f'(u,k)=\frac{E'}{K'}-1+\frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2 u}\,.$$

---

[1]) Voir, p. ex., Tannery et Molk, *l. c.*, t. IV, form. CII, p. 95 et 96.

Le paramètre $u \equiv u_\lambda$ parcourant l'intervalle $(0, K)$, la fonction $\mathrm{dn}\,u$ est comprise entre 1 et k'; par conséquent:

$$f'(u, k) \geqslant \frac{E'}{K'} - k^2 .$$

Mais, comme nous avons indiqué précédemment (chap. I, form. 16**): $\frac{E'}{K'} \geqslant k^2$, donc:

$$f'(u, k) \geqslant 0 .$$

Cela montre déjà que la fonction $f(u_\lambda, k)$, et par suite aussi la différence $b - \frac{h}{\lambda}$, constituent dans l'intervalle $(0 \leqslant u_\lambda \leqslant K)$ une fonction monotone et non décroissante. Cette différence, étant d'ailleurs égale à zéro pour $u_\lambda = 0$ (form. 43 et 52), n'est donc jamais négative:

$$b \geqslant \frac{h}{\lambda} = h \frac{k \,\mathrm{sn}\, u_\lambda}{\mathrm{dn}\, u_\lambda} . \tag{52*}$$

De cette limitation du paramètre b vient immédiatement (voir la form. 39) que les images des points A et B sont situés dans le demi-plan supérieur des T:

$$\frac{1}{i} T_{A,B} \geqslant 0 ,$$

d'où résulte, dans le plan des w, la position caractéristique des points A et B (voir la fig. 36): ils se trouvent plus proche des images du point N que de M; autrement dit, la valeur absolue des ordonnées v de ces points A et B est plus grande ou, au moins, égale à K'. Nous allons faire usage de cette propriété un peu plus loin.

En revenant maintenant à l'expression (49), on voit que la variable ζ peut être écrite sous la forme plus simple:

$$\zeta = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi u_\lambda}{2KK'} w + \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\mathrm{H}(u_\lambda + w)}{\mathrm{H}(u_\lambda - w)} \cdot \frac{\mathrm{cn}\, w - \mathrm{cn}\, u_\lambda}{\mathrm{cn}\, w + \mathrm{cn}\, u_\lambda} \right] . \tag{53}$$

Notons encore le résultat qui vient des formules (51) et (51**):

$$\zeta_M = \zeta_N = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi u_\lambda}{2K'} . \tag{54}$$

Or, ayant désigné auparavant (fig. 35) par η_0 la valeur absolue des ordonnées η de tous les points formant le segment de droite AB, il s'ensuit:

$$\eta_0 = \frac{\pi u_\lambda}{2K'}, \qquad \text{d'où:} \qquad u_\lambda = \frac{2K'}{\pi} \eta_0 . \tag{54*}$$

Rappelons en outre que ce paramètre η_0, lui seul, détermine déjà l'excentricité ε de l'ellipse $\eta = \eta_0$ sur laquelle se trouve notre arc AB (voir la form. 4 du chap. IV):

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Cosh}\, \eta_0} . \tag{55}$$

Il sera utile d'introduire maintenant l'amplitude χ de $(u_\lambda \mid k)$:

$$\chi = \mathrm{am}\,(u_\lambda \mid k), \qquad \text{c'est-à-dire:} \qquad u_\lambda = F(\chi, k) . \tag{56}$$

Conformément à la figure 36, le paramètre u_λ doit être toujours compris dans l'intervalle

$$0 < u_\lambda < K; \tag{56*}$$

par suite

$$0 < \chi < \frac{\pi}{2}\,; \tag{56**}$$

il en résulte donc que l'ordonnée η_0 ne peut être plus grande que $\frac{\pi K}{2K'}$:

$$0 < \eta_0 < \frac{\pi K}{2K'} \tag{56***}$$

Passons maintenant à la transformation des autres paramètres. D'après la formule (44), on obtient:

$$m = \frac{h}{k}\cdot\frac{k^2 \operatorname{sn} u_\lambda - k' \operatorname{dn} u_\lambda}{\operatorname{dn} u_\lambda + k' \operatorname{sn} u_\lambda} \qquad \text{et} \qquad n = \frac{h}{k}\cdot\frac{k^2 \operatorname{sn} u_\lambda + k' \operatorname{dn} u_\lambda}{\operatorname{dn} u_\lambda - k' \operatorname{sn} u_\lambda}.$$

En portant dans ces formules l'amplitude χ, il vient:

$$m = \frac{h}{k}\cdot\frac{\sin\chi\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} - k'}{\cos^2\chi}\,; \qquad n = \frac{h}{k}\cdot\frac{\sin\chi\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} + k'}{\cos^2\chi}\,.$$

En désignant ensuite, de même que dans les cas précédents, par $4\,a$ la longueur de notre segment de droite MN:

$$n - m = 4\,a\,, \tag{57}$$

nous trouverons enfin:

$$\left.\begin{aligned} h &= 2\,a\,\frac{k}{k'}\cos^2\chi\,; \qquad m = 2\,a\left(-1 + \frac{1}{k'}\sin\chi\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}\right); \\ n &= 2\,a\left(+1 + \frac{1}{k'}\sin\chi\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}\right); \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

et (form. 52):

$$b = \frac{2\,a}{k'}\cos\chi\left[\frac{\Theta'(u_\lambda)}{\Theta(u_\lambda)} + \frac{\pi u_\lambda}{2\,K K'}\right], \tag{59}$$

ou encore, d'après la form. (27):

$$b = \frac{2\,a}{k'}\cos\chi\left[E(\chi, k) + \left(\frac{\pi}{2\,KK'} - \frac{E}{K}\right)F(\chi, k)\right] = \frac{2\,a}{k'}\cos\chi\left[E(\chi, k) - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)F(\chi, k)\right]. \tag{59*}$$

Il reste encore à satisfaire à la dernière condition:

$$\lim_{\substack{z=\infty \\ t=\infty \\ w = w_\lambda = u_\lambda \pm 2iK'}} \left(\frac{z}{t}\right) = 1\,.$$

À cet effet, transformons d'abord la formule (53) en l'écrivant:

$$\zeta = \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi u_\lambda}{2KK'}\,w + \frac{i}{2}\ln\left[\frac{H^2(u_\lambda + w)}{H(u_\lambda - w)\,H(u_\lambda + w)}\cdot\frac{(\operatorname{cn} w - \operatorname{cn} u_\lambda)^2}{\operatorname{sn}^2 u_\lambda - \operatorname{sn}^2 w}\right];$$

or

$$H(u_\lambda - w)\,H(u_\lambda + w) = k \operatorname{sn}(u_\lambda - w)\operatorname{sn}(u_\lambda + w)\,\Theta(u_\lambda - w)\,\Theta(u_\lambda + w),$$

ensuite [1])

$$\operatorname{sn}(u_\lambda - w)\operatorname{sn}(u_\lambda + w) = \frac{\operatorname{sn}^2 u_\lambda - \operatorname{sn}^2 w}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u_\lambda \operatorname{sn}^2 w}\,;$$

---

[1]) Voir, l. c., t. II, p. 287.

il en résulte que l'expression

$$e^{-i\zeta} = i\, e^{\frac{\pi u_\lambda}{2KK'} w} \frac{\operatorname{cn} w - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u_\lambda - \operatorname{sn}^2 w} \mathrm{H}(u_\lambda + w) \sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_\lambda \operatorname{sn}^2 w}{k\, \Theta(u_\lambda - w)\, \Theta(u_\lambda + w)}}$$

augmente indéfiniment lorsque la variable w tend vers $w_\lambda = u_\lambda \pm 2iK'$, tandis que l'expression inverse $e^{i\zeta}$ tend alors vers zéro. D'autre part, en vertu de la formule (44), on a:

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ w=w_\lambda}} \left[t \,.\, (\operatorname{sn}^2 u_\lambda - \operatorname{sn}^2 w) \right] = -2i \frac{h}{k} \operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda ;$$

par suite, il vient:

$$\lim_{\substack{z=\infty \\ t=\infty}} \frac{z}{t} = -\frac{c}{2} \lim_{\substack{w=w_\lambda \\ t=\infty}} \frac{e^{-i\zeta}}{t} = \frac{c}{2h} \cdot \frac{\operatorname{cn} u_\lambda}{\operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda} e^{\frac{\pi u^2_\lambda}{2KK'}} \mathrm{H}(2u_\lambda) \sqrt{k \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u_\lambda}{\Theta(0)\, \Theta(2u_\lambda)}} \,.$$

De là s'ensuit déjà la relation cherchée déterminant le paramètre c. Après avoir effectué encore des simples transformations — entre autres celle-ci [1]):

$$\frac{\mathrm{H}(2u_\lambda)}{\Theta(2u_\lambda)} = \sqrt{k} \operatorname{sn} 2u_\lambda = 2\sqrt{k} \frac{\operatorname{sn} u_\lambda \operatorname{cn} u_\lambda \operatorname{dn} u_\lambda}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u_\lambda}$$

et, en introduisant enfin le paramètre χ (form. 56), nous obtenons:

$$\frac{c}{h} = 2 \operatorname{tg} \chi\, e^{-\frac{\pi u^2_\lambda}{2KK'}} \sqrt{\frac{1}{k \sin 2\chi\, \mathrm{H}(2u_\lambda)}} \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} (1 - k^2 \sin^2 \chi) =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{\pi u^2_\lambda}{2KK'}}}{k(1 + \cos\chi)} \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^4 \chi}{\Theta(2u_\lambda)}} \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} \,, \tag{60}$$

ou encore, en passant aux fonctions relatives au module complémentaire k':

$$\frac{c}{h} = 2 \operatorname{tg} \chi \sqrt{\frac{i}{k \sin 2\chi\, \mathrm{H}(2iu_\lambda \,|\, K', iK)}} \sqrt{\frac{2k'K'}{\pi}} (1 - k^2 \sin^2 \chi) =$$

$$= \frac{2}{k(1 + \cos\chi)} \sqrt{\frac{\cos^4 \chi - k'^2 \sin^4 \chi}{\Theta(2iu_\lambda \,|\, K', iK)}} \sqrt{\frac{2kK'}{\pi}} \,. \tag{60*}$$

Toutes les relations entre les paramètres étant ainsi établies, nous pouvons maintenant passer à la recherche de la coordonnée elliptique ξ_0 (fig. 35) déterminant la position des extrémités de l'arc étudié AB sur l'ellipse $\eta = \eta_0$. Or, dans le plan des w, aux extrémités A et B correspondent deux points, symétriques par rapport à l'axe de quantités réelles (fig. 36). La valeur absolue des ordonnées de ces points, comme nous avons démontré un peu plus haut (p. 89), ne peut pas être moindre que K'; en la désignant donc par $v_0 + K'$, nous aurons:

$$w_A = K + iK' + iv_0 ; \qquad w_B = K - iK' - iv_0 ; \qquad (0 \leqslant v_0 \leqslant K'). \tag{61}$$

[1]) l. c., t. II, p. 293.

D'autre part, dans le plan des t, la coordonnée de l'image de ces points, A et B, étant $t = +ib$, il résulte de la première des formules (44):

$$\left(\frac{\operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}\right)_{w=K\pm iK'\pm iv_0} = \frac{k^2 \operatorname{sn} u_\lambda - \frac{kb}{h} \operatorname{dn} u_\lambda}{\operatorname{dn} u_\lambda + \frac{kb}{h} \operatorname{sn} u_\lambda}. \tag{62}$$

Or

$$\frac{\operatorname{dn}(K \pm iK' \pm iv_0)}{\operatorname{sn}(K \pm iK' \pm iv_0)} = i\,k\,k' \frac{\operatorname{sn}(iv_0)}{\operatorname{dn}(iv_0)} = -k\,k' \frac{\operatorname{sn}(v_0 \mid k')}{\operatorname{dn}(v_0 \mid k')} = -k' \operatorname{cn}(K' - v_0 \mid k'). \tag{62*}$$

Désignons, cette fois, par γ la *coamplitude* de $(v_0 \mid k')$, c'est-à-dire l'amplitude de $(K' - v_0 \mid k')$

$$\gamma = \operatorname{coam}(v_0 \mid k') = \operatorname{am}(K' - v_0 \mid k')\,; \quad \cos\gamma = \operatorname{cn}(K' - v_0 \mid k')\,; \tag{63}$$

il est à remarquer que, le paramètre v_0 variant entre 0 et K' (c'est-à-dire la fonction $\operatorname{cn}(K' - v_0 \mid k')$ — entre 0 et $+1$), la complitude γ peut admettre chaque valeur de l'intervalle:

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{63*}$$

Ainsi, on obtient d'après les formules (62) et (63), en y portant de plus l'expression (59*) pour b:

$$\cos\gamma = \frac{1}{k' \sin\chi} \left\{ \sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi} + \operatorname{tg}\chi \left[E(\chi, k) - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) F(\chi, k) \right]} \right\}. \tag{64}$$

Après avoir déterminé, par cette formule, la coamplitude γ, on peut calculer le paramètre v_0 à l'aide des Tables de Legendre, d'après la formule:

$$v_0 = K' - F(\gamma, k'). \tag{65}$$

Enfin, quant à la coordonnée elliptique ξ_0 même $(w_A = K + iK' + iv_0)$, on a d'après la formule (53):

$$\xi_0 + i\eta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi u_\lambda v_0}{2KK'} + i\frac{\pi u_\lambda}{2K'} + \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\Theta_1(u_\lambda + iv_0)}{\Theta_1(u_\lambda - iv_0)} \cdot \frac{\operatorname{cn} u_\lambda + i\frac{k'}{k} \operatorname{cn}(v_0 \mid k')}{\operatorname{cn} u_\lambda - i\frac{k'}{k} \operatorname{cn}(v_0 \mid k')} \right],$$

d'où :

$$\xi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi u_\lambda v_0}{2KK'} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2kk' \operatorname{cn} u_\lambda \operatorname{cn}(v_0 \mid k')}{k^2 \operatorname{cn}^2 u_\lambda - k'^2 \operatorname{cn}^2(v_0 \mid k')} + \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1(u_\lambda - iv_0)}{\Theta_1(u_\lambda + iv_0)}, \tag{66}$$

ou plus simplement:

$$\xi_0 = -\frac{\pi u_\lambda v_0}{2KK'} + \operatorname{arc\,tg} \frac{k \operatorname{cn} u_\lambda}{k' \operatorname{cn}(v_0 \mid k')} + \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1(u_\lambda - iv_0)}{\Theta_1(u_\lambda + iv_0)}, \tag{66*}$$

ou encore:

$$\xi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{k \operatorname{cn} u_\lambda}{k' \operatorname{cn}(v_0 \mid k')} + \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1(v_0 + iu_\lambda \mid K', iK)}{\Theta_1(v_0 - iu_\lambda \mid K', iK)}. \tag{66**}$$

Il est à observer que conformément à la détermination du logarithme admise au début (p. 87), il faut attribuer aux fonctions multiformes figurant dans les formules (66*) et (66**) exclusivement des valeurs comprises dans les intervalles :

$$0 \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{k \operatorname{cn} u_\lambda}{k' \operatorname{cn}(v_0 \mid k')} \leqslant \frac{\pi}{2};$$

et

$$0 \leqslant \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1(u_\lambda - i v_0)}{\Theta_1(u_\lambda + i v_0)} < \pi; \qquad -\pi < \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1(v_0 + i u_\lambda \mid K', iK)}{\Theta_1(v_0 - i u_\lambda \mid K', iK)} \leqslant 0.$$

Nous donnons ci-dessous le résumé des principales formules déterminant la représentation conforme que nous venons d'étudier dans ce paragraphe.

Tableau de formules III.

$$z = -c \cdot \cos\zeta; \qquad \zeta = \int_{-h}^{t} \frac{(ib - t)\,dt}{\sqrt{(h^2 - t^2)(im - t)(in - t)}};$$

$$\zeta = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi u_\lambda}{2KK'} w + \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\mathrm{H}(u_\lambda + w)}{\mathrm{H}(u_\lambda - w)} \cdot \frac{\operatorname{cn} w - \operatorname{cn} u_\lambda}{\operatorname{cn} w + \operatorname{cn} u_\lambda} \right];$$

$$w = iK' + F(\varphi + i\psi, k); \qquad \varphi + i\psi = \arccos\left(-\frac{i\lambda t + h}{t + i\lambda h} \right);$$

Paramètres primitifs: a, k et η_0.
Paramètres dérivés: ε, u_λ, χ, h, m, n, c, b et ξ_0.

$$\varepsilon = \frac{1}{\operatorname{Cosh} \eta_0}; \qquad u_\lambda = \frac{2K'}{\pi} \eta_0; \qquad \chi = \operatorname{am}(u_\lambda \mid k);$$

$$h = 2a \frac{k}{k'} \cos^2\chi; \qquad m = 2a \left(-1 + \frac{1}{k'} \sin\chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi} \right);$$

$$n = 2a \left(1 + \frac{1}{k'} \sin\chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi} \right);$$

$$c = \frac{2a}{k'} e^{-\frac{\pi u_\lambda^2}{2KK'}} \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^4\chi}{\Theta(2u_\lambda)}} \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}; \qquad b = \frac{2a}{k'} \cos\chi \left[E(\chi, k) - \left(1 - \frac{E'}{K'} \right) F(\chi, k) \right];$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{k' \sin\chi} \left\{ \sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi} + \operatorname{tg}\chi \left[E(\chi, k) - \left(1 - \frac{E'}{K'} \right) F(\chi, k) \right]} \right\};$$

$$v_0 = K' - F(\gamma, k'); \qquad \xi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{k \operatorname{cn} u_\lambda}{k' \operatorname{cn}(v_0 \mid k')} + \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \frac{\Theta_1(v_0 + i u_\lambda \mid K', iK)}{\Theta_1(v_0 - i u_\lambda \mid K', iK)}.$$

En terminant l'étude de ce cas de la représentation conforme, nous allons indiquer encore quelques cas de dégénérescence.

1°. $\eta_0 = 0$; $\qquad 0 < k < 1$.
On trouve alors :

$$\varepsilon = 1; \quad u_\lambda = 0; \quad \chi = 0; \quad h = 2a\frac{k}{k'}; \quad m = -2a; \quad n = +2a; \quad b = 0; \quad c = \frac{h}{k} = \frac{2a}{k'};$$

ensuite:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}; \qquad \rho_0 = 0; \qquad \xi_0 = \text{arc tg}\,\frac{k}{k'}.$$

On voit donc que dans ce cas notre arc AB dégénère en un segment de droite, situé entre les foyers F_1 et F_2. Si $k = 0$, ce segment AB est égal à toute la distance focale F_1F_2; au contraire, si $k = 1$, le segment AB est infiniment court par rapport à la distance focale qui augmente alors indéfiniment.

Tout cela résulte aussi des formules (38) qui prennent dans ce cas la forme:

$$z = -\frac{2a}{k'}\cos\zeta, \qquad \zeta = \text{arc cos}\left[k'\sqrt{1+\left(\frac{t}{2a}\right)^2}\right],$$

d'où:

$$z = \sqrt{t^2 + 4a^2}.$$

2°. $\eta_0 = \dfrac{\pi K}{2K'}$; $\qquad \left(u_\lambda = K; \quad \chi = \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\qquad 0 < k < 1$.
Il en résulte

$$h = 0; \qquad m = 0; \qquad n = 4a; \qquad b = 0; \qquad c = 2a\,e^{-\frac{\pi K}{2K'}} = 2a\,e^{-\eta_0};$$

et

$$\cos\gamma = +1; \qquad \gamma = 0; \qquad \rho_0 = K'.$$

Pour trouver maintenant la valeur limite du paramètre ξ_0, il faut poser:

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

et faire tendre δ vers zéro par valeurs positives. Il vient alors:

$$u_\lambda \cong K - \frac{1}{k'}\delta,$$

et (form. 64):

$$\cos\gamma \cong +1 - \frac{2K'}{\pi k'}\delta,$$

d'où l'on tire:

$$\gamma \cong 2\sqrt{\frac{K'}{\pi k'}\delta};$$

par suite:

$$\rho_0 = K' - F(\gamma, k') \cong K' - 2\sqrt{\frac{K'}{\pi k'}\delta}.$$

En tenant compte de ces relations, on déduit de la form. (66*)

$$\lim_{\delta=0} \xi_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat indique que, dans le plan des ζ, les segments de droite AB couvrent complètement les parallèles $\eta = \pm \eta_0$, et par conséquent, dans le plan des z, les extrémités A et B se touchent de manière que l'arc AB constitue tout le contour de l'ellipse $\eta = \eta_0$.

D'ailleurs, on peut démontrer immédiatement cette conclusion en partant de la formule fondamentale (38). On fera cela d'une manière la plus simple en introduisant encore la représentation conforme et biunivoque de l'extérieur du segment MN du plan des t sur l'extérieur d'un cercle $|Z| = a$. En effet, posons:

$$t = Z - \frac{a^2}{Z} + 2ia,$$

et portons cette expression dans (38) en y transportant simultanément le point de départ de l'intégration au point N; il vient:

$$\zeta = \frac{\pi}{2} + i\eta_0 + i\int_{4ia}^{t} \frac{dt}{\sqrt{t(t-4ia)}} = \pi + i\eta_0 + i\ln\frac{Z}{a},$$

d'où:

$$z = \frac{c}{2}\left(\frac{Z}{a}e^{\eta_0} + \frac{a}{Z}e^{-\eta_0}\right) = Z + \frac{a^2}{Z}e^{-2\eta_0}.$$

3°. $k = 1$; $(k' = 0)$; $0 < \eta_0 < \frac{\pi K}{2K'} = \infty$.

Étant donc

$$0 < u_\lambda < \infty \qquad \text{et} \qquad 0 < \chi < \frac{\pi}{2},$$

on obtient:

$$\lim_{k=1} h = +\infty; \quad \lim_{k=1} m = +\infty; \quad \lim_{k=1} n = +\infty; \quad \lim_{k=1} b = +\infty; \quad \lim_{k=1} \frac{b}{h} = \operatorname{tg}\chi;$$

et

$$\lim_{k=1} \frac{c}{h} = 1;$$

ensuite, en posant $k' = \delta$ et faisant tendre δ vers zéro, et en se servant encore des résultats exposés dans la note sur la page 81, on tire aisément de la form. (64):

$$\lim_{k=1} \cos\gamma = 0,$$

d'où:

$$\lim_{k=1} \gamma = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k=1} \rho_0 = 0;$$

par suite:

$$\lim_{k=1} \xi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, dans le plan des ζ, les images des arcs considérés se réduisent aux points isolés:

$$\zeta = (2\varkappa + 1)\frac{\pi}{2} + (-1)^{\varkappa} \, . \, i\eta_0 \, .$$

Par conséquent, dans le plan des z, l'arc AB fait une infiniment petite partie du contour de l'ellipse $\eta = \eta_0$ qui, elle même, augmente indéfiniment avec la distance focale $2c$. Comme le rayon de courbure de l'ellipse, à son sommet péricentral, s'exprime par $c\frac{\text{Cosh}^2 \eta_0}{\text{Sinh}\, \eta_0}$, il est clair que ce rayon augmente indéfiniment — on en reconnaît que l'arc AB dégénère alors en un segment de droite. On pourrait vérifier directement cette assertion en partant de la formule (38), où il faut effectuer, à cet égard, le changement de variable qui transporterait l'origine de coordonnées, dans le plan des t, au point situé sur le segment MN, par exemple: au point $t = ib$.

4°. $k = 0$; $(k' = 1)$.

L'autre paramètre χ ayant d'ailleurs une valeur quelconque de l'intervalle $(0, +{}^1/_2\pi)$, de même que celui $0 < u_\lambda < K$, il vient toutefois de la form. (56***) que l'ordonnée elliptique η_0 ne peut être que

$$\eta_0 = 0 \, .$$

Ainsi, nous revenons sur la valeur extrême du paramètre η_0, examinée au numéro 1°. Comme il y a été expliqué, dans ce cas combiné ($k = 0$; $\eta_0 = 0$), notre représentation conforme et biunivoque se réduit à la transformation de l'extérieur du segment MN du plan des t sur l'extérieur du segment $AB \equiv F_1 F_2$ du plan des z.

Ajoutons encore que dans l'autre cas combiné: $k = 1$; $\chi = \frac{\pi}{2}$, $(u_\lambda = K, \ \eta_0 = \infty)$, le résultat dépend de la valeur limite g vers laquelle tend le rapport $\frac{k'}{\frac{\pi}{2} - \chi}$, à savoir: l'arc d'ellipse AB dégénère alors en un arc de cercle dont le rayon ρ_c est une fonction de cette limite g (comparer le cas 5° de dégénérescence de l'arc périfocal d'ellipse — p. 83). Le calcul facile à effectuer fournie la relation suivante entre ce rayon ρ_c de l'arc AB et la valeur limite g (de même que pour l'arc périfocal, on y doit examiner séparément le cas $g = 0$):

$$\rho_c = \lim_{\substack{k=1 \\ \chi = \frac{\pi}{2} \\ g \neq 0}} \left(c \frac{\text{Cosh}^2 \eta_0}{\text{Sinh}\, \eta_0} \right) = a \lim_{\substack{k=1 \\ \chi = \frac{\pi}{2} \\ g \neq 0}} e^{K - u_\lambda} = a \frac{1 + \sqrt{1 + g^2}}{g} \, ; \qquad \left(g = \lim_{\substack{k=1 \\ \chi = \frac{\pi}{2}}} \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\frac{\pi}{2} - \chi} \right) .$$

Un écoulement du fluide visqueux par le tuyau conique.

par PIOTR SZYMAŃSKI.

Le but de cette note est d'obtenir une solution exacte des équations de Stokes pour le cas du mouvement permanent du fluide visqueux incompressible dans un tuyau conique de section circulaire.

Nous supposons que le champ de forces extérieures est nul, le mouvement étant symétrique par rapport à l'axe du tuyau.

Soient (ρ, δ) deux coordonnées sphériques d'un élément du fluide, ρ désignant la distance entre cet élément et le sommet du cône et δ — l'angle que le rayon vecteur forme avec l'axe du tuyau. (Fig. 1).

En désignant par v_ρ et v_δ les composantes de la vitesse et par p, σ et $\nu = \frac{\mu}{\sigma}$ — resp. la pression, la densité et le coefficient cinématique de viscosité du fluide, on peut mettre les équations du mouvement sous la forme:

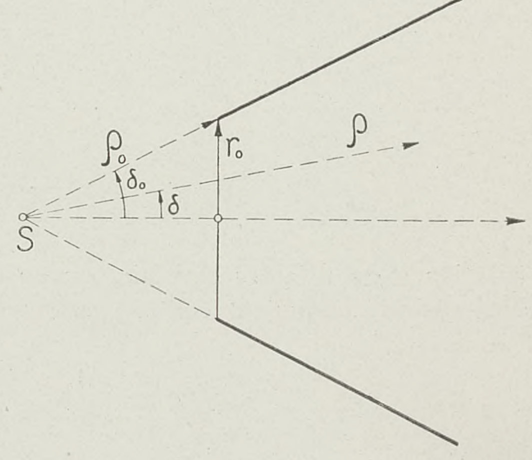


Fig. 1.

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial \rho} + \nu\left(\Delta v_\rho - \frac{2 v_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} - \frac{2 v_\delta}{\rho^2}\operatorname{ctg}\delta\right) = v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\delta}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \delta} - \frac{v_\delta^{\,2}}{\rho} \tag{1}$$

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\rho\,\partial \delta} + \nu\left(\Delta v_\delta + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\rho}{\partial \delta} - \frac{v_\delta}{\rho^2 \sin^2\delta}\right) = v_\rho \frac{\partial v_\delta}{\partial \rho} + \frac{v_\delta}{\rho}\frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} + \frac{v_\rho v_\delta}{\rho} \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} + \frac{2 v_\rho}{\rho} + \frac{v_\delta}{\rho}\operatorname{ctg}\delta = 0 \tag{3}$$

où Δ signifie le laplacien c. à-d:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\delta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \delta}\,.$$

En introduisant le tourbillon:

$$\omega = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\delta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \delta} \tag{4}$$

et en posant:

$$E = \frac{p}{\sigma} + \frac{v_\rho^2 + v_\delta^2}{2} \tag{5}$$

on transforme les équations (1) et (2) comme suit:

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \delta} + \frac{\omega}{\rho} \operatorname{ctg} \delta \right) = \omega v_\delta \tag{1a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \delta} - \nu \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial \rho} = - \rho \omega v_\rho . \tag{2a}$$

En éliminant E, on obtient:

$$\nu \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{\rho^2 \sin^2 \delta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\omega v_\delta)}{\partial \delta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \omega v_\rho)}{\partial \rho} . \tag{6}$$

Introduisons une fonction de courant ψ par les équations:

$$v_\rho = - \frac{1}{\rho^2 \sin \delta} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} , \tag{7}$$

$$v_\delta = \frac{1}{\rho \sin \delta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} , \tag{8}$$

l'équation (3) sera alors satisfaite quelle que soit la fonction ψ. Les équations (4) et (6) se transforment maintenant comme suit:

$$\omega = \frac{1}{\rho \sin \delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{1}{\sin \delta} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \right) , \tag{I}$$

$$\nu \left\{ \frac{1}{\rho \sin \delta} \cdot \frac{\partial^2 (\omega \rho \sin \delta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{1}{\sin \delta} \cdot \frac{\partial (\omega \rho \sin \delta)}{\partial \delta} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\omega}{\rho \sin \delta} \right)}{\partial \delta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \frac{\partial \left(\frac{\omega}{\rho \sin \delta} \right)}{\partial \rho} . \tag{II}$$

La solution ψ de ce système doit satisfaire aux conditions suivantes (δ_0 désignant l'angle de convergence du tuyau):

1°. $\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\delta = \delta_0} = 0$

2°. $\left. \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \right|_{\delta = \delta_0} = 0$

(1° et 2°) les vitesses v_δ et v_ρ sont nulles sur les parois du tuyau.

3°. $\frac{1}{\sin \delta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \underset{\delta \to 0}{\to} 0$ la vitesse v_δ est nulle sur l'axe du tuyau.

4⁰ $\left.\frac{1}{\sin\delta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\delta}\right|_{\delta\to 0}$ est bornée c. à — d. la vitesse v_ρ est bornée sur l'axe du tuyau.

5⁰ $\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial\psi}{\partial\delta}\right)_{\delta\to 0}\to 0$ c.à-d. $\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}=0$.

Il est nécessaire d'ajouter encore une condition pour déterminer complètement le mouvement du fluide. En effet, Q désignant le débit de l'écoulement, on a:

$$Q=\int_0^{\delta_0} v_\rho\,.\,\rho\,d\delta\,.\,2\pi\rho\sin\delta=2\pi\int_0^{\delta_0}\rho^2\sin\delta\,.\,v_\rho\,d\delta=-2\pi\int_0^{\delta_0}\frac{\partial\psi}{\partial\delta}d\delta=2\pi\Big[\psi\Big]_{\delta=0}-2\pi\Big[\psi\Big]_{\delta=\delta_0}$$

On peut admettre $\Big[\psi\Big]_{\delta=0}=0$ d'où:

$$\Big[\psi\Big]_{\delta=\delta_0}=-\frac{Q}{2\pi}$$

Donc la condition supplementaire sera:

6⁰. $\Big[\psi\Big]_{\delta=\delta_0}=-\frac{Q}{2\pi}$; $\Big[\psi\Big]_{\delta=0}=0$

La solution du problème sera fournie par le développement de la forme:

$$\psi=v_0\,r_0^2\sum_{n=0}^{n=\infty}(R\sin\delta_0)^n\,.\,\psi_n(\cos\delta)\,.\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n\cdots \tag{9}$$

où v_0 désigne la valeur moyenne de la vitesse à l'entrée du tuyau, r_0 — le rayon de la section d'entrée, $R=\frac{r_0\,v_0}{\nu}$ — la constante de Reynolds et ρ_0 est égal à $\frac{r_0}{\sin\delta_0}$. (La vitesse moyenne v_0 est définie par la relation:

$$Q=\pi\,r_0^2\,v_0$$

il en resulte que la quantité Q ainsi que la constante R doivent être affectées d'un signe $\pm$ suivant le sens de la vitesse de l'écoulement).

En tenant compte des relations entre Q, r_0, v_0, ρ_0 et δ_0 on peut écrire maintenant:

$$\psi=\frac{Q}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\cos\delta)\left(\frac{R\,r_0}{\rho}\right)^n \tag{10}$$

Les fonctions ψ_n se déterminent par la voie de récurrence. En effet, en posant:

$$x=\cos\delta \tag{11}$$

et

$$L_n(f)=n(n+1)f+(1-x^2)\frac{d^2f}{d\,x^2} \tag{12}$$

on parvient au système suivant d'équations:

$$L_n(\psi_n)=A_n(x) \tag{13n}$$

les fonctions $A_n(x)$ étant déterminées par le système:

$$L_{n+2}(A_n) = (1 - x^2)\, H_{n-1}(x) \tag{14n}$$

où l'on a posé:

$$H_{n-1}(x) = \psi_1 \frac{d\,B_{n-2}}{d\,x} + 2\,\psi_2 \frac{d\,B_{n-3}}{d\,x} + \cdots (n-1)\,\psi_{n-1} \frac{d\,B_0}{d\,x} -$$

$$- \left[4\,B_0 \frac{d\,\psi_{n-1}}{d\,x} + 5\,B_1 \frac{d\,\psi_{n-2}}{d\,x} + \cdots (n+3)\,B_{n-1} \frac{d\,\psi_0}{d\,x} \right]; \tag{15n}$$

$$H_{-1}(x) = 0 \quad : \quad H_0(x) = -\,4\,B_0 \frac{d\,\psi_0}{d\,x}$$

et

$$B_n(x) = \frac{A_n(x)}{1 - x^2} \tag{16n}$$

Les conditions $1^0 - 6^0$ prennent la forme: $(x_0 = \cos \delta_0)$

1. $\psi_n(x_0) = 0$ pour $n = 1, 2, 3 \ldots$

2. $\psi'_n(x_0) = 0$ „ $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

3. $\dfrac{\psi_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{x \to 1}{\to} 0$ „ $n = 1, 2, 3 \ldots$

4. $\psi'_n(1)$ existe „ $n = 0, 1, 2, 3$

5. $\psi''_n(x)\sqrt{1 - x^2} \underset{x \to 1}{\to} 0$ „ $n = 0, 1, 2, 3$

6. $\psi_0(1) = 0$ $\psi_0(x_0) = -\dfrac{1}{2}$

La solution du problème s'obtient de la manière suivante. En supposant connues les fonctions $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{n-1}$, on connait aussi les fonctions $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ et B_0, $B_1, \ldots B_{n-1}$, donc, aussi la fonction $H_{n-1}(x)$ d'après l'équation (15n). On résout l'équation (14n) et l'on trouve ensuite $\psi_n(x)$ de l'équation (13n).

Tout se reduit, donc, à la résolution des équations linéaires de la forme:

$$L_m\left[Y(x)\right] = X(x) \tag{17}$$

Cette dernière équation admet l'intégrale générale:

$$Y(x) = \alpha\, W_m(x) + \beta\, S_m(x) + \Pi_m\left[X(x)\right] \tag{18}$$

où $\Pi_m(X)$ désigne une solution particulière quelconque.

La fonction $W_m(x)$ est un polynome de degré $m+1$ divisible par $1 - x^2$; on a notamment:

$$W_1(x) = 1 - x^2 \quad ; \quad W_3(x) = \frac{3}{2}(5\,x^2 - 1)(1 - x^2) \quad ; \quad W_5(x) = \frac{15}{8}(21\,x^4 - 14\,x^2 + 1)(1 - x^2)$$

$$W_2(x) = 3\,x(1 - x^2)\,; \quad W_4(x) = \frac{5}{2}(7\,x^3 - 3\,x)(1 - x^2)\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en général :

$$W_m(x) = (1 - x^2)\, P'_m(x) ; \tag{19}$$

où $P_m(x)$ désigne le polynome de Legendre.
La fonction $S_m(x)$ est de la forme :

$$S_m(x) = U_m(x) + W_m(x) \ln \frac{1-x}{1+x}, \tag{20}$$

où $U_m(x)$ est un polynome de degré m satisfaisant à l'équation :

$$m(m+1)\, U_m + (1 - x^2)\, U''_m = 4\, W'_m + \frac{4\, x\, W_m}{1 - x^2} \tag{21}$$

Les cinq premiers polynomes $U_n(x)$ sont les suivants :

$$U_1(x) = -2\,x \qquad U_3(x) = 13\,x - 15\,x^3 \qquad U_5(x) = -\frac{113}{4}x + 105\,x^3 - \frac{315}{4}x^5$$

$$U_2(x) = 4 - 6\,x^2 \qquad U_4(x) = -\frac{16}{3} + \frac{115}{3}x^2 - 35\,x^4 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots$$

On détermine la solution particulière $\Pi_m(X)$ par la méthode de la variation des constantes arbitraires et l'on obtient :

$$\Pi_m\Big[X(x)\Big] = \frac{1}{C_m}\int_x^1 \frac{W_m(t)\, S_m(x) - W_m(x)\, S_m(t)}{1 - t^2}\, X(t)\, dt ; \tag{22}$$

où :

$$C_m = 4\, P_m(1)\, P'_m(1) = 2\, m\,(m+1)\, P_m{}^2(1) = 2\, m\,(m+1), \tag{23}$$

puisque $P_m(1) = 1$.

Si la fonction $\dfrac{X(x)}{1-x}$ est bornée dans l'intervalle $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ (on démontre par récurrence que la fonction $\dfrac{H_{n-1}(x)\,.\,(1-x^2)}{1-x}$ jouit de cette propriété), l'expression (22) peut être transformée à l'aide de (20) et l'on obtient, en intégrant par parties :

$$\Pi_m(X) = \frac{1}{C_m}\int_x^1 \frac{U_m(x)\, W_m(t) - W_m(x)\, U_m(t)}{1 - t^2}\, X(t)\, dt + $$

$$+ \frac{2\, W_m(x)}{C_m}\int_x^1 \frac{ds}{1 - s^2}\int_s^1 \frac{W_m(t)}{1 - t^2}\, X(t)\, dt . \tag{24}$$

La formule (18) donne maintenant :

$$A_n(x) = \alpha\, W_{n+2}(x) + \Pi_{n+2}\Big[(1 - x^2)\, H_{n-1}(x)\Big], \tag{25n}$$

(on a posé $\beta = 0$ en ayant égard aux conditions 3°, 4°, 5°).

Puisque le polynome $V_n(x) = -\frac{W_{n+2}(x)}{4n+6}$ satisfait à l'équation:

$$L_n\left[V_n(x)\right] = W_{n+2}(x),$$

on obtient aussi:

$$\psi_n(x) = a_n W_n(x) + b_n W_{n+2}(x) + \Pi_n \left\{\Pi_{n+2}\left[1 - x^2) H_{n-1}(x)\right]\right\}. \tag{26n}$$

Les formules de récurrence (15n), (16n) et (26n) avec les conditions 1° — 6° déterminent les fonctions $\psi_n(x)$.

Nous allons démontrer que ces conditions peuvent etre remplies.

D'abord on détermine les constantes a_n et b_n conforment aux conditions 1° et 2°, ce qui revient à la résolution d'un système de deux équations linéaires, dont le déterminant est égal à:

$$\Delta_n(x_0) = W_n(x_0) W'_{n+2}(x_0) - W_{n+2}(x_0) W_n'(x_0).$$

Il en résulte que les constantes a_n et b_n existent si x_0 est différent de racines de toutes les équations $\Delta_n(x) = 0$ $n = 0, 1, 2 \ldots$ et de points limites de ces racines. Cette restriction est essentielle.[1])

Quant aux conditions 3°, 4°, 5°, elles sont remplies grâce aux propriétés suivantes de foctions $\psi_n(x)$, que l'on démontre par l'induction:

α) $H_n(x)$ est bornée dans l'intervalle $(x_0, 1)$,

β) $\psi_n(x)$ est de la forme $\psi_n(x) = (1 - x^2)\varphi_n(x)$ où $\varphi_n(x)$ est la fonction bornée pour $x_0 \leqslant x \leqslant 1$.

γ) $\psi_n''(x)$ est bornée pour $x_0 \leqslant x \leqslant 1$.

Enfin, le calcul simple prouve que la fonction $\psi_0(x)$ est entièrement déterminée par les conditions 2° et 6°.

Donc, le développement (10) existe et nous fournit la solution du problème proposé.[2])

Ceci établi, on exprime la vitesse de l'écoulement par les formules:

$$v_\rho = \frac{Q}{\pi R^2 r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n'(\cos\delta) \left(\frac{R r_0}{\rho}\right)^{n+2} \tag{27}$$

$$v_\delta = -\frac{Q}{\pi R^2 r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\psi_n(\cos\delta)}{\sin\delta} \left(\frac{R r_0}{\rho}\right)^{n+2}. \tag{28}$$

Quant à la pression, on obtient le développement suivant:

$$\frac{p}{\sigma} + \frac{v_\rho^2 + v_\delta^2}{2} = \frac{\nu Q}{\pi R^3 r_0^3} \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\cos\delta) \left(\frac{R r_0}{\rho}\right)^{n+3} + \text{Const} \tag{29}$$

---

[1]) Il est aisé à démontrer que toute fonction $\Delta_n(x)$ admet au moins un zéro dans l'intervalle $(-1,1)$. En effet, le nombre de zéros du polynome $P'_n(x)$ dans cet intervalle étant ègal à $n-1$, la fonction $\frac{P'_{n+2}(x)}{P'_n(x)} = \frac{W_{n+2}(x)}{W_n(x)}$ admet au moins un extremum dans l'intervalle $(-1,1)$. Cela démontre l'assertion.

[2]) Je n'ai pas réussi à démontrer la convergence de ce développement.

où:

$$E_0 = -\frac{A_0'}{3} \tag{30_0}$$

$$E_1 = -\frac{A_1'}{4} \tag{30_1}$$

et:

$$E_n = -\frac{A'_n}{n+3} + \frac{1}{n+3}\left[\psi_1 B_{n-2} + 2\psi_2 B_{n-3} + \cdots (n-1)\psi_{n-1} B_0\right] \tag{30n}$$

La constante s'exprime en fonction de la pression et de la vitesse, déterminée en un point quelconque du tuyau.

Le calcul effectif de fonctions $\psi_n(x)$ est assez laborieux. Ainsi je me suis borné à calculer les deux premières seulement:

$$\psi_0(x) = -\frac{(1-x)(1+x+x^2-3x_0^2)}{2(1-x_0)^2(1+2x_0)}$$

$$\psi_1(x) = \frac{(1-x_2)(x-x_0)^2(5x_0^2-3-2x_0x)}{16x_0(1-x_0)^4(1+2x_0)^2}$$

$$\psi_0'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2-x_0^2}{(1-x_0)^2(1+2x_0)}$$

$$\psi_1'(x) = \frac{(x-x_0)\left[6x_0^2-3+(5x_0^3-6x_0)x-(13x_0^2-6)x^2+5x_0x^3\right]}{8x_0(1-x_0)^4(1+2x_0)^2}$$

et:

$$E_0(x) = \frac{3x^2-1}{(1-x_0)^2(1+2x_0)}$$

$$E_1(x) = -\frac{3\left[4x_0^3-3x_0+(6-18x_0^2)x+(18x_0-12x_0^3)x^2+(30x_0^2-10)x^3-15x_0x^4\right]}{16x_0(1-x_0)^4(1+2x_0)^2}$$

Comme le montre la formule (9), l'erreur de l'approximation ainsi obtenue est de l'ordre de $\sin^2\delta_0$. Ainsi, il est inutile de retenir dans l'expression même de fonctions $\psi_0(x)$ et $\psi_1(x)$ les termes du même ordre ou d'ordre plus élevé. Donc, en développant ces fonctions suivant les puissances de $\sin\delta$ et de $\sin\delta_0$, on obtient:

$$v_\rho = 2v_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(1-\xi^2)\left[1+\frac{r_0 v}{9\nu}\sin\delta_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)(1-3,5\,\xi^2+\xi^4)\right] \tag{31}$$

$$v_\delta = 0 \tag{32}$$

$$\frac{p-p_0}{\sigma} = \frac{8\nu v_0}{3r_0\sin\delta_0}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3-1\right] - v_0^2\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^4-1\right] \tag{33}$$

où l'on a pose:

$$\xi = \frac{\sin\delta}{\sin\delta_0} \tag{34}$$

et p_0 désigne la pression au centre de la section d'entrée.

Pour nous rendre compte de la manière, dont l'écoulement varie le long du tuyau, nous transformons (31) et (32) en posant:

$$\rho = \rho_0 + s \tag{35}$$

et en developpant suivant les puissances de s.

En écrivant:

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{1}{1+\dfrac{s}{\rho_0}}=\frac{1}{1+\dfrac{s\sin\delta_0}{r_0}}=1-\frac{s\sin\delta_0}{r_0}+\frac{s^2\sin^2\delta_0}{r_0^{\,2}}-\dots$$

on peut se borner aux termes de l'ordre de $\sin\delta_0$. On obtient ainsi:

$$v_\rho=2\,v_0\,(1-\xi^2)\left[1+\frac{r_0\,v_0}{9\,\nu}\sin\delta_0\,(1-3,5\,\xi^2+\xi^4)\right]-\frac{6\,v_0\,s}{r_0}(1-\xi^2)\,\sin\delta_0 \tag{36}$$

$$\frac{p-p_0}{\sigma}=-\frac{8\,\nu\,v_0}{r^2}\,s+4\left(\frac{v_0^{\,2}}{r_0}\,s+\frac{4\,\nu\,v_0}{r_0^{\,3}}\,s^2\right)\sin\delta_0 \tag{37}$$

On ne peut se servir de ces formules que pour les valeurs petites de l'angle δ_0.

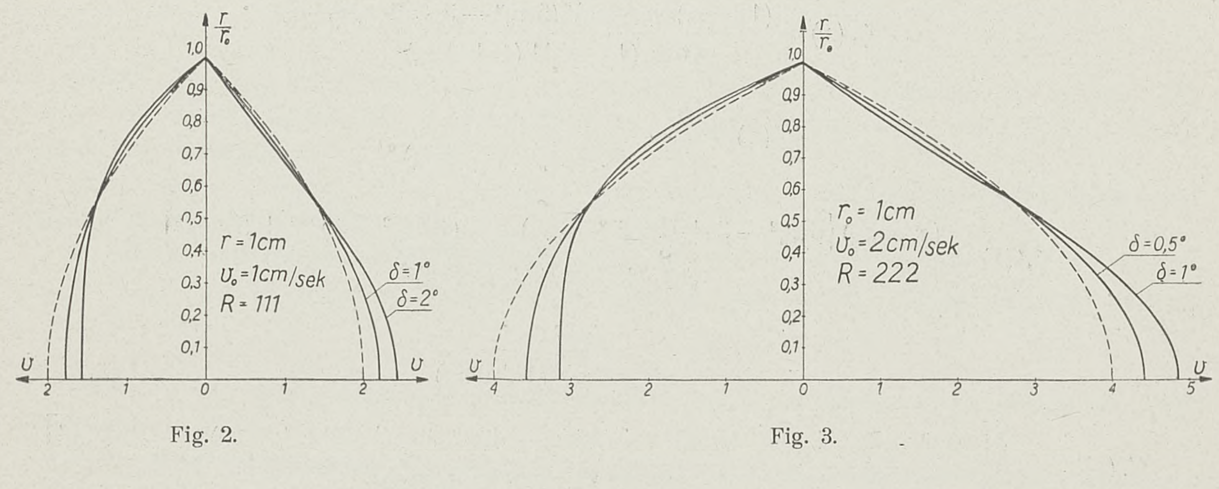


Fig. 2. Fig. 3.

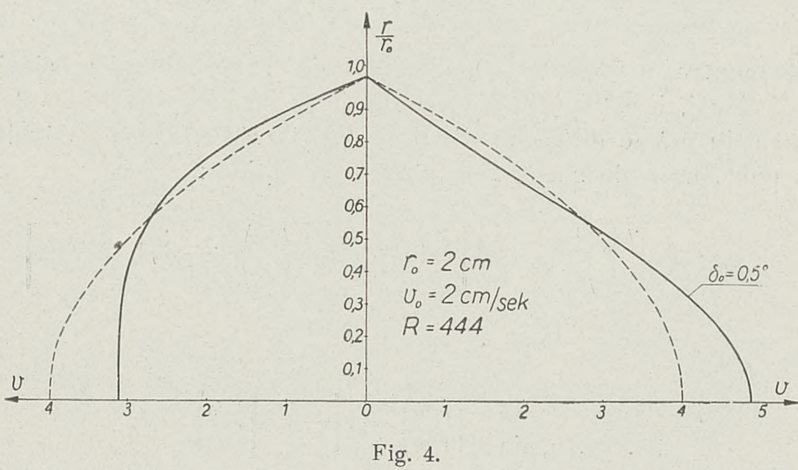


Fig. 4.

Les fig. fig. 2—4 représentent les courbes de distribution de vitesses v_ρ, à la section d'entrée du tuyau, pour quelques valeurs particulières de r_0, δ_0 et v_0 et pour $\nu=0{,}018\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sc}}$. Chaque figure contient les deux diagrammes correspondant aux deux sens opposés de l'écoulement, en comparaison avec la courbe correspondant à l'écoulement laminaire de Poiseuille par le tube cylindrique de la même section droite. Les courbes correspondant à l'écoulement convergent (dirigé vers le somment du cône) sont tracées à gauche de l'axe

des ordonnées, celles correspondant à l'écoulement divergent sont disposées à droite. La parabole de Poiseuille est tracée en trait interrompu. $\left[R\right.$ signifie la constante de Reynolds $\left.R = \frac{2 r_0 v_0}{\nu}\right]$.

L'écoulement convergent est caracterisé par les courbes considérablement aplatiés en comparaison avac la parabole de Poiseuille. La forme des courbes dans les deux cas est sensiblement conforme aux données de l'expérience.

Il est à remarquer, que l'écoulement défini par les formules (36) et (37) tend vers celui de Poiseuille quand δ_0 tend vers zéro.

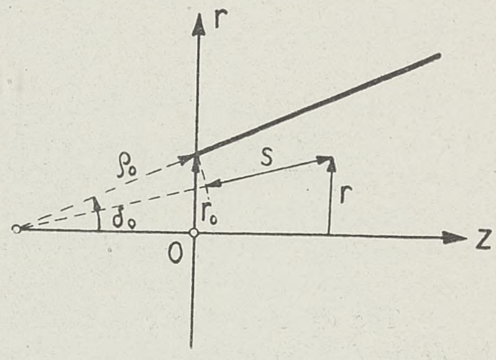


Fig. 5.

En effet, si l'on dispose le système de coordonnées cylindriques, comme le montre la fig. 5, on a pour $\delta_0 \to 0$:

$$s \to z \qquad \text{et:} \qquad \xi \to \frac{r}{r_0}.$$

Les formules (36) et (37) deviennent, donc, à la limite:

$$v_z = 2 v_0 \left(1 - \frac{r^2}{{r_0}^2}\right)$$

et:

$$\frac{p - p_0}{\sigma} = - \frac{8 \nu v_0}{{r_0}^2} z$$

ce qui prouve notre assertion.

A Note on the Discontinuous Potential*)

By M. J. THOMPSON, Sc. D., Ann Arbor, U. S. A.

The original theory of the discontinuous potential as dezeloped by Witoszyński for the determination of the forces acting on an airplane wing of infinite span is based on a multiple-valued complex potential which may be written in the form [1]):

$$f(Z) = -u\left(Z e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z}\right) + \frac{8\, i\, u\, a^{3/2} \sin\alpha}{Z^{1/2} + a^{1/2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

while the complex velocity is

$$\frac{df}{dZ} = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - \frac{4\, i\, u\, a^{3/2} \sin\alpha}{Z^{1/2}(Z^{1/2} + a^{1/2})^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

In these expressions $Z = X + i\,Y = r\,e^{i\vartheta}$ is the complex variable in the plane of the primitive circle, with center at the origin and radius a, which is to be transformed conformally into an airfoil section by means of a function of the form $z = F(Z)$. The transformed profile is taken in the zero position, that is, the real axis in the z-plane coincides with the axis of zero lift, α is the angle of attack measured from this axis, and u is the magnitude of the velocity at an infinite distance from the profile.

It has been shown by several writers [2]) on this subject that the expressions for the lift and drag acting on a unit length of a wing of infinite span may be written in the forms:

$$P_{y_1} = \sigma\, u^2\, a\, K_1 \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$P_{x_1} = \sigma\, u^2\, a\, [K_2 \sin\alpha + K_3 \sin^2\alpha \cos\alpha] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

where P_{y_1} and P_{x_1} represent the lift and drag forces, respectively, and σ is the mass density of the fluid, while K_1, K_2 and K_3 are constants which depend on the shape of the profile.

In a previous article[3]) the present writer has pointed out that in case of asymmetric or cambered airfoils, the constants K_2 and K_3 are in general different from zero, and that a range of values of α can always be found for which the drag is negative, which, of course, is absurd. For symmetric profiles, the constant K_2 is always zero and there is no difficulty of this kind.

---

*) Cet article n'appartient pas aux travaux de l'Institut Aérodynamique de Varsovie. Il paraît néanmoins dans ce recueil, car il se rattache à un travail antérieur de Mr. Thompson, exécuté pendant sa collaboration à l'Institut et publié dans le Fasc. IV (rem. de la Rédaction).

[1]) S. Neumark: „Sur les formes diverses du potentiel servant à calculer les forces qui agissent sur les profils d'aviation". Travaux de l'Institut Aérodynamique de Varsovie, Fascicule 1, 1927, p. 43.

[2]) C. Witoszyński: „La Mécanique des Profils d'Aviation" (E. Chiron, Paris, 1924) § 12.

S. Neumark: loc. cit., § 6.

M. J. Thompson: „The effect of a hinged flap on the aerodynamic characteristics of an airfoil", Travaux de l'Institut Aérodynamique de Varsovie, Fascicule IV, 1930, p. 23.

[3]) M. J. Thompson: loc. cit., pp. 24 — 29.

In the paper referred to in note (3) a generalized form of the discontinuous potential was considered such that the complex velocity takes the form·

$$\frac{df}{dZ} = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - 4\,i\,u\,a\,\sin\alpha\left\{\frac{E_1 a^{1/2}}{Z^{1/2}(Z^{1/2}+a^{1/2})^2} + \frac{2E_2 a}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^4} + \frac{4E_3 Z^{1/2} a^{3/2}}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^6}\right\}$$

the numbers E_1, E_2, and E_3 being arbitrary constants which are determined by the various conditions that the complex velocity must satisfy. Although the conclusions given in this paper are correct as far as they affect the work that followed, the analysis is not entirely free from errors and we therefore give the method and results here in corrected form.

Let us suppose that instead of the form (2) for the complex velocity, the second or complementary term is an infinite series, the whole expression being of the form:

$$\frac{df}{dZ} = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - 4\,i\,u\,a\,\sin\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}E_n a^{\frac{n}{2}}}{Z^{1-\frac{n}{2}}(Z^{1/2}+a^{1/2})^{2n}} \quad . \; , \; . \; . \quad (5)$$

It may easily be verified that any function of this form gives the primitive circle $Z = ae^{i\vartheta}$ as a stream-line. In order to satisfy Joukovsky's hypothesis that the velocity at the point $Z = -a$ corresponding to the trailing edge of the transformed profile shall be equal to zero, it is necessary to stipulate that $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = 1$.

As a second condition on these constants, we shall stipulate that their values must be so chosen that that part of the expression for the drag which forms the coefficient of the term in $\sin\alpha$, shall be equal to zero. Now after substituting the expression (5) in the first formula of Blasius, it will be found that the portion of the complex expression for the lift and drag depending on $\sin\alpha$, is of the form:

$$P'_{y1} - i\,P'_{x1} = -4\,i\,\sigma\,u^2 a\sin\alpha\oint\left(1-\frac{a^2}{Z^2}\right)\left\{\frac{E_1 a^{1/2}}{Z^{1/2}(Z^{1/2}+a^{1/2})^2} + \frac{2E_2 a}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{4E_3 Z^{1/2} a^{3/2}}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^6} + \frac{8E_4 Z a^2}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^8} + \frac{16E_5 Z^{3/2} a^{5/2}}{(Z^{1/2}+a^{7/2})^{10}} + \ldots \sim \ldots\right\}\frac{dZ}{dz}\,dZ$$

In this expression we substitute [4]) $Z = a\zeta^2$, then $\zeta = \pm i\rho$ thus reducing the integrals to real ones taken along the imaginary axis. Finally we put $\rho = \frac{1}{t}$ so as to avoid having to deal with improper integrals and we get:

$$P'_{y1} - i\,P'_{x1} = 16\,\sigma\,u^2 a\,\sin\alpha\int_o^1\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)}\left\{E_1 + \frac{8E_2 t^2}{(t^2+1)^2} - \frac{4E_3 t^2(t^4-14t^2+1)}{(t^2+1)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{64E_4 t^4(t^4-6t^2+1)}{(t^2+1)^6} + \frac{16E_5 t^4(t^8-44t^6+166t^4-44t^2+1)}{(t^2+1)^8} + \ldots\right\}\frac{dZ}{dz}\,dt$$

---

[4]) C. Witoszyński: loc. cit., § 12.

where the same substitutions are, of course, to be made in the expression for $\frac{dZ}{dz}$. If we write the reciprocal of the derivative of the transformation function in the form:

$$\frac{dZ}{dz} = \Re\left(\frac{dZ}{dz}\right) + i\,\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)$$

then the imaginary part of the above expression when set equal to zero, gives us the equation

$$\int_0^1 \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)} \left\{ E_1 + \frac{8\,E_2\,t^2}{(t^2+1)^2} - \frac{4\,E_3\,t^2\,(t^4-14\,t^2+1)}{(t^2+1)^4} - \frac{64\,E_4\,t^4\,(t^4-6\,t^2+1)}{(t^2+1)^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{16\,E_5\,t^4\,(t^8-44\,t^6+166\,t^4-44\,t^2+1)}{(t^2+1)^8} - \cdots \right\} \Im\left(\frac{dZ}{dz}\right) dt = 0$$

It should be noted that there is a term in $\sin^3\alpha$ in the drag which may also cause trouble, but its coefficient is usually very small and is has been completely neglected here[5]). Now it may be shown that the coefficients in the series

$$\frac{dZ}{dz} = 1 + \frac{A_2}{Z^2} + \frac{A_3}{Z^3} + \cdots$$

are all real for symmetric profiles, and since we must substitute $Z = -a\,\rho^2 = -\frac{a}{t^2}$, we have in such a case

$$\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right) = 0$$

Thus it is easily seen why the coefficient K_2 in the formula (4) for the drag is zero for symmetric profiles. For an asymmetric profile these coefficients will evidently depend on the transformation function and thus the complex potential will be a function of the shape of the profile.

For our third condition on the coefficients $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$, we shall demand that the lift as calculated by the new complex potential shall be approximately the same as that given by the original discontinuous potential (1). Since it is known that, to a very close approximation, the lift on an airfoil is directly proportional to the circulation around it, this condition leads to an equation based on the equality of the circulations as determined by the two functions. The circulation around the primitive circle as determined by the original discontinuous potential is[6])

$$C = 8\,u\,a \sin\alpha$$

In order to calculate the circulation due to our new function, we shall determine the velocity on the primitive circle as a function of the polar angle ϑ and then substitute this value in the integral

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} V_c\,a\,d\vartheta$$

The circulation due to the plane translatory flow represented by the first term of (5) is, of course, zero while the velocity on the primitive circle due to the remaining part is found by substituting this expression in the formula

$$V_c = i\,e^{i\vartheta} \left[\frac{df}{dZ}\right]_{Z = a\,e^{i\vartheta}}$$

---

[5]) M. J. Thompson: loc. cit., p. 23.

[6]) S. Neumark: loc. cit., p. 45.

This gives, after simplification

$$V_c' = 2\,u \sin\alpha \left[\frac{E_1}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{6}\right)} + \frac{E_2}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2} + \frac{E_3}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^3} + \frac{E_4}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^4} + \frac{E_5}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^5} + \ldots \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

and the circulation is

$$C' = 8\,u\,a \sin\alpha \left[E_1 + \frac{2}{3} E_2 + \frac{7}{15} E_3 + \frac{12}{35} E_4 + \frac{83}{315} E_5 + \cdots \right]$$

and setting this equal to the value found for the original complex potential, we get

$$E_1 + \frac{2}{3} E_2 + \frac{7}{15} E_3 + \frac{12}{35} E_4 + \frac{83}{315} E_5 + \cdots = 1$$

The above considerations have given us three conditions which the coefficients $E_1 \ldots\ldots E_n$ must satisfy and it therefore seems natural to use only the first three terms of the complementary part of expression (5). Thus only three arbitrary constants will be involved and the new function will be as simple as possible. The complex velocity then becomes:

$$\frac{df}{dZ} = -u \left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2} \right) - 4\,i\,u\,a \sin\alpha \left\{ \frac{E_1 a^{1/2}}{Z^{1/2}(Z^{1/2}+a^{1/2})^2} + \frac{2\,E_2\,a}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^4} + \frac{4\,E_3\,Z^{1/2} a^{3/2}}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^6} \right\} \quad (7)$$

and the conditions which the coefficients must satisfy are

$$E_1 + E_2 + E_3 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\int_0^1 \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)} \left\{ E_1 + \frac{8\,E_2\,t^2}{(t^2+1)^2} - \frac{4\,E_3\,t^2\,(t^4-14\,t^2+1)}{(t^2+1)^4} \right\} \Im\left(\frac{dZ}{dz}\right) dt = 0 \quad \ldots\ldots (9)$$

$$E_1 + \frac{2}{3} E_2 + \frac{7}{15} E_3 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

A solution of these equations is possible only for a definite profile, for which the value of $\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)$ may be found. The simplest possible asymmetric profile is a circular arc which may be obtained, placed in the zero position, by using the Joukovsky transformation function [7]):

$$z = \frac{(Z+a)^2}{Z + k\,a\,e^{i\mu}}$$

and putting $k = \cos\mu$. The reciprocal of the derivative of this function is

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{(Z + k\,a\,e^{i\mu})^2}{(Z+a)\{Z + a\,(2\,k\,e^{i\mu} - 1)\}}$$

and after making the proper substitutions and separating out the imaginary part, we get:

$$\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right) = 2\,k\,t^4 \sin\mu \, \frac{k\,t^2\,(k-\cos\mu) + 1 - k\cos\mu}{(t^2-1)\,\{(t^2+1)^2 + 4\,k^2 t^4 - 4\,k\,t^2\,(t^2+1)\cos\mu\}} \quad \ldots (11)$$

[7]) Ć. Witoszyński: loc. cit., pp. 38—39.

For the special case of a circular arc, we get

$$\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)=\frac{2k(1-k^2)^{3/2}t^4}{(t^2-1)\{(t^2+1)^2-4k^2t^2\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11')$$

and equation (9) becomes

$$\int_0^1 \frac{t^4(t^2-1)}{(t^2+1)\{(t^2+1)^2-4k^2t^2\}}\left\{E_1+\frac{8E_2t^2}{(t^2+1)^2}-\frac{4E_3t^2(t^4-14t^2+1)}{(t^2+1)^4}\right\}dt=0.$$

When $k=0.2$, corresponding to a ratio of camber to chord of 0.10206, this equation, after evaluation of the integral by Simpson's rule, reduces to

$$E_1+1.59981\,E_2+1.89767\,E_3=0$$

and its simultaneous solution with equations (8) and (10) gives the following values for the coefficients:

$$E_1=10.67339 \qquad E_2=-25.79570 \qquad E_3=16.12231$$

A check on these values may be obtained by comparing the velocity distribution on the primitive circle with that obtained by means of the second term of the original complementary function of only new terms. These values are determined by means of the formula[8]):

$$\frac{V'_{c_1}}{2u\sin\alpha}=\frac{1}{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

and by (6):

$$\frac{V'_{c_3}}{2u\sin\alpha}=\frac{E_1}{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}+\frac{E_2}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2}+\frac{E_3}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^3}$$

The results are shown in the accompanying table and are plotted against ϑ in Figure 1 (p. 117).

Velocity Distribution with Three Terms

$\pm\vartheta$	$\frac{V'c_1}{2u\sin\alpha}$	$\frac{V'c_3}{2u\sin\alpha}$	$\pm\vartheta$	$\frac{V'c_1}{2u\sin\alpha}$	$\frac{V'c_3}{2u\sin\alpha}$
0	0.50000	0.90306	100	0.60872	0.57507
10	0.50095	0.90084	110	0.63550	0.50266
20	0.50383	0.89234	120	0.66667	0.42938
30	0.50867	0.87684	130	0.70293	0.35671
40	0.51555	0.85697	140	0.74515	0.30097
50	0.52457	0.82844	150	0.79440	0.28225
60	0.53590	0.79256	160	0.85204	0.33782
70	0.54971	0.74972	170	0.91983	0.54048
80	0.56624	0.69947	180	1.00000	1.00000
90	0.58579	0.63997			

[8]) S Neumark: loc. cit., p. 44.

It is seen at once that these distributions are far from being the same, consequently we would hardly expect that the coefficient K_3 in the expression for the drag as obtained by these two functions would be in very close approximation.

In order to obtain a better agreement between the velocity distributions as determined by the modified and original forms of the discontinous potential, let us suppose that the new complementary function consists of four terms instead of three. The complex velocity will then be of the form:

$$\frac{df}{dZ} = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - 4\,i\,ua\sin\alpha\left\{\frac{E_1 a^{1/2}}{Z^{1/2}\left(Z^{1/2}+a^{1/2}\right)^2} + \frac{2\,E_2\,a}{\left(Z^{1/2}+a^{1/2}\right)^4} + \frac{4\,E_3\,Z^{1/2}\,a^{3/2}}{\left(Z^{1/2}+a^{1/2}\right)^6} + \frac{8\,E_4\,Za^{5/2}}{\left(Z^{1/2}+a^{1/2}\right)^8}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

The above conditions when applied to this function give the following equations to be satisfied by the coefficients:

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

$$\int_o^1 \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)}\left\{E_1 + \frac{8\,E_2\,t^2}{(t^2+1)^2} - \frac{4\,E_3\,t^2(t^4-14\,t^2+1)}{(t^2+1)^4} - \frac{64\,E_4\,t^4(t^4-6\,t^2+1)}{(t_2+1)^6}\right\}\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)dt = 0 \ldots (14)$$

$$E_1 + \frac{2}{3}E_2 + \frac{7}{15}E_3 + \frac{12}{35}E_4 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

However, there are now four coefficients to be determined and so a fourth equation is needed. This we shall obtain by taking equality of the velocities at the point $\vartheta = 0$ on the primitive circle as given by the original and modified complementary terms as being an index of the agreement between the velocity distributions. The condition that these two values be equal leads to the equation:

$$E_1 + \frac{E_2}{2} + \frac{E_3}{4} + \frac{E_4}{8} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

If we write equation (14) in the form

$$E_1 + a_2\,E_2 + a_3\,E_3 + a_4\,E_4 = 0$$

where

$$a_2 = \frac{8\displaystyle\int_o^1\left[\frac{t^2(t^2-1)^2}{(t^2+1)^3}\right]\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)dt}{\displaystyle\int_o^1\left[\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)}\right]\Im\left(\frac{dZ}{d\,z}\right)dt}$$

$$a_3 = \frac{-4\displaystyle\int_o^1\left[\frac{t^2(t^2-1)^2(t^4-14\,t^2+1)}{(t^2+1)^5}\right]\Im\left(\frac{dZ}{d\,z}\right)dt}{\displaystyle\int_o^1\left[\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)}\right]\Im\left(\frac{dZ}{d\,z}\right)dt}$$

$$a_4 = \frac{-64\displaystyle\int_o^1\left[\frac{t^4(t^2-1)^2(t^4-6\,t^2+1)}{(t^2+1)^5}\right]\Im\left(\frac{dZ}{d\,z}\right)dt}{\displaystyle\int_o^1\left[\frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)}\right]\Im\left(\frac{dZ}{d\,z}\right)dt}$$

then the simultaneous solution of this equation with (13), (15) and (16) gives:

$$E_1 = \frac{\gamma + 5}{\gamma} \qquad E_2 = \frac{-22}{\gamma} \qquad E_3 = \frac{31}{\gamma} \qquad E_4 = \frac{-14}{\gamma}$$

where $\gamma = 22\,a_2 - 31\,a_3 + 14\,a_4 - 5$.

In the case of the Joukovsky profile discussed above we get:

$$a_2 = \frac{8\int_o^1 \frac{t^6(t^2-1)\{k(k-\cos\mu)t^2+1-k\cos\mu\}}{(t^2+1)^3\{(t^2+1)^2+4k^2t^4-4kt^2(t^2+1)\cos\mu\}}\,dt}{\int_o^1 \frac{t^4(t^2-1)\{k(k-\cos\mu)t^2+1-k\cos\mu\}}{(t^2+1)\{(t^2+1)^2+4k^2t^4-4kt^2(t^2+1)\cos\mu\}}\,dt}$$

$$a_3 = \frac{-4\int_o^1 \frac{t^6(t^2-1)\{k(k-\cos\mu)t^2+1-k\cos\mu\}\{t^4-14t^2+1\}}{(t^2+1)^5\{(t^2+1)^2+4k^2t^4-4kt^2(t^2+1)\cos\mu\}}\,dt}{\int_o^1 \frac{t^4(t^2-1)\{k(k-\cos\mu)t^2+1-k\cos\mu\}}{(t^2+1)\{(t^2+1)^2+4k^2t^4-4kt^2(t^2+1)\cos\mu\}}\,dt}$$

$$a_4 = \frac{-64\int_o^1 \frac{t^8(t^2-1)\{k(k-\cos\mu)t^2+1-k\cos\mu\}\{t^4-6t^2+1\}}{(t^2+1)^7\{(t^2+1)^2+4k^2t^4-4kt^2(t^2+1)\cos\mu\}}\,dt}{\int_o^1 \frac{t^4(t^2-1)\{k(k-\cos\mu)t_2+1-k\cos\mu\}}{(t^2+1)\{(t^2+1)^2+4k^2t^4-4kt^2(t^2+1)\cos\mu\}}\,dt}$$

For the circular arc for which $k = \cos\mu = 0{,}2$, we find, using Simpson's rule, that

$$a_2 = 1.59981 \qquad a_3 = 1.89767 \qquad a_4 = 1.99584$$

and

$$E_1 = -6.24440 \quad E_2 = 31.87536 \quad E_3 = -44.91528 \quad E_4 = 20.28432$$

Now in attempting to determine the velocity distribution on the primitive circle corresponding to these values it will be found that the velocity at any point reduces to the difference of two very large numbers while the velocity itself is a relatively small quantity. Consequently the above constants must be determined more accurately in order to obtain satisfactory results, in fact it is necessary to calculate their values and those of $\cos\frac{\vartheta}{2}$ as well as to at least eight significant figures in order to obtain the velocity accurately to five. The determination of the values of a_2, a_3 and a_4 to the required number of significant places either by exact integration or by Simpson's rule involves a great deal of labor, but it is possible to simplify this work considerably.

In the case where $k = \cos\mu = 0$ we get the rectilinear profile in the transformed plane and since this is a symmetric section the left side of equation (14) is identically zero, but the values of a_1, a_3 and a_4 are not zero and may be evaluated by exact integration with relatively litttle trouble. The results in this case are

$$a_2 = \frac{8\int_o^1 \frac{t^6(t^2-1)}{(t^2+1)^5}\,dt}{\int_o^1 \frac{t^4(t^2-1)}{(t^2+1)^3}\,dt} = \frac{\frac{15\pi}{32} - \frac{3}{2}}{-\frac{9\pi}{16} + \frac{7}{4}} = -\frac{3(5\pi-16)}{2(9\pi-28)} = 1.596795481$$

$$a_3 = \frac{-4\int\limits_0^1 \frac{t^6(t^2-1)(t^4-14t^2+1)}{(t^2+1)^7}\,dt}{\int\limits_0^1 \frac{t^4(t^2-1)}{(t^2+1)^3}\,dt} = \frac{-\frac{\pi}{64}+\frac{1}{60}}{-\frac{9\pi}{16}=\frac{7}{4}} = \frac{15\pi-16}{60(9\pi-28)} = 1.890876543$$

$$a_4 = \frac{-64\int\limits_0^1 \frac{t^8(t^2-1)(t^4-6t^2+1)}{(t^2+1)^9}\,dt}{\int\limits_0^1 \frac{t^4(t^2-1)}{(t^2+1)^3}\,dt} = \frac{-\frac{\pi}{128}-\frac{1}{105}}{-\frac{9\pi}{16}+\frac{7}{4}} = \frac{105\pi+128}{840(9\pi-28)} = 1.986922113$$

The values of the constants in the expression for the velocity are

$$E_1 = -6.4542014 \quad E_2 = 32.798487 \quad E_3 = -46.216049 \quad E_4 = 20.871718$$

and we note at once that these values do not differ greatly from those obtained for $k=0.2$. This fact leads us to the supposition that perhaps these coefficients are practically constant for all profiles. In order to determine the influence of the camber of the profile on these values another circular arc was considered for which $k=0.4$ corresponding to a camber-chord ratio of 0.21822. To investigate the effect of a change in thickness calculations were also made for a Joukovsky profile for which $k=0.2$; $\mu=30^0$, the two integrals in both these case being evaluated by Simpson's rule. The results are summarized in the following table:

k	μ	a_2	a_3	a_4	E_1	E_2	E_3	E_4
0	90^0	1.59693	1.89127	1.98645	−6.45420	32.79849	−46.21605	20.87172
0.2	arc cos 0.2	1.59981	1.89767	1.99584	−6.24440	31.87536	−44.91528	20.28432
0.4	arc cos 0.4	1.60922	1.91908	2.02731	−6.10246	31.26772	−44.05906	19.89764
0.2	30^0	1.61155	1.92483	2.03854	−6.39570	32.54108	−45.85334	20.70796

It thus appears that these quantities change but little with the shape of the profile and we can for all practical purposes consider them as being absolute constants.

For purposes of accuracy in determining the velocity distribution, we shall in what follows consider only the limiting case $k=0$, $\mu=\frac{\pi}{2}\cdot$ The velocity distribution for the complementary functions of four terms is

$$\frac{V'_{c_4}}{2u\sin\alpha} = \frac{E_1}{1+\cos\frac{\vartheta}{2}} + \frac{E_2}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2} + \frac{E_3}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^3} + \frac{E_4}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^4}$$

and using the values of the constants given above we obtain the results shown in the next table and plotted graphically in Figure 1. It is seen at once that although these values are much closer to those for the original discontinuous potential, the differences are still rather large.

Velocity Distribution with Four Terms

$\pm\vartheta$	$\frac{V'_{c_4}}{2u\sin\alpha}$	$\pm\vartheta$	$\frac{V'_{c_4}}{2u\sin\alpha}$
0	0.50000	100	0.66577
10	0.50209	110	0.68711
20	0.50803	120	0.70348
30	0.51796	130	0.71296
40	0.53164	140	0.71514
50	0.54884	150	0.71398
60	0.56912	160	0.72441
70	0.59197	170	0.78698
80	0.61650	180	1.00000
90	0.64161		

Because of this disagreement we have carried out the analysis with a complementary function of five terms, that is

$$\frac{df}{dZ} = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - 4iua\sin\alpha\left\{\frac{E_1 a^{1/2}}{Z^{1/2}(Z^{1/2}+a^{1/2})^2} + \frac{2E_2 a}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^4} + \frac{4E_3 Z^{1/2} a^{3/2}}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{8E_4 Z a^2}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^8} + \frac{16 E_5 Z^{3/2} a^{5/2}}{(Z^{1/2}+a^{1/2})^{10}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

The four conditions that we applied in the previous case now give

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4 + a_5 E_5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$E_1 + \frac{2}{3}E_2 + \frac{7}{15}E_3 + \frac{12}{35}E_4 + \frac{83}{315}E_5 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$E_1 + \frac{E_2}{2} + \frac{E_3}{4} + \frac{E_4}{8} + \frac{E_5}{16} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

where a_2, a_3 and a_4 have the values given on page 111 and

$$a_5 = \frac{16\int_o^1 \frac{t^4(t^2-1)^2(t^8-44t^6+166t^4-44t^2+1)}{(t^2+1)^9}\,\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)dt}{\int_o^1 \frac{(t^2-1)^2}{t^2+1}\,\Im\left(\frac{dZ}{dz}\right)dt}$$

If we regard E_5 as an arbitrary constant then the simultaneous solution of equations (18) . . . . (21) gives

$$E_1 = \frac{\gamma+5}{\gamma} - \frac{(11a_2 - 48a_3 + 67a_4 - 30a_5)E_5}{6\gamma}$$

$$E_2 = -\frac{22}{\gamma} - \frac{(243\,a_3 - 264\,a_4 + 132\,a_5 - 11)\,E_5}{6\gamma}$$

$$E_3 = \frac{31}{\gamma} = \frac{(143\,a_2 - 281\,a_4 + 186 a_5 - 48)\,E_5}{6\gamma}$$

$$E_4 = -\frac{14}{\gamma} - \frac{(264\,a_2 - 281\,a_3 + 84\,a_5 - 67)\,E_5}{6\gamma}$$

where as before $\gamma = 21\,a_2 - 31\,a_3 + 14\,a_4 - 5$.

For a Joukovsky profile the value of a_5 becomes

$$a_5 = \frac{16\int\limits_o^1 \frac{t^8(t^2-1)\,\{k(k-\cos\mu)\,t^2+1-k\cos\mu\}\,\{t^8-44\,t^6+166\,t^4-44\,t^2+1\}}{(t^2+1)^9\,\{(t^2+1)^2+4\,k^2\,t^4-4\,k\,t^2\,(t^2+1)\cos\mu\}}\,d\,t}{\int\limits_o^1 \frac{t^4\,(t^2-1)\,\{k\,(k-\cos\mu)\,t^2+1-k\cos\mu\}}{(t^2+1)\,\{(t^2+1)^2+4\,k^2\,t^4-4\,k\,t^2\,(t^2+1)\cos\mu\}}\,d\,t}$$

For the limiting case of the rectilinear profile where $k = \cos\mu = 0$ we find that

$$a_5 = \frac{16\int\limits_o^1 \frac{t^8\,(t^2-1)\,(t^8-44\,t^6+166\,t^4-44\,t^2+1)}{(t^2+1)^{11}}\,d\,t}{\int\limits_o^1 \frac{t^4\,(t^2-1)}{(t^2+1)^3}\,d\,t} =$$

$$= \frac{-\frac{\pi}{256} - \frac{3}{140}}{-\frac{9\pi}{16} + \frac{7}{4}} = \frac{35\,\pi + 192}{560\,(9\,\pi - 28)} = 1.965512586$$

and the expressions for the above coefficients then become

$$E_1 = -\ \ 6.4542014 + 0.2388029\,E_5$$

$$E_2 = \ \ 32.7984866 - 1.4173993\,E_5$$

$$E_3 = -46.2160493 + 3.0805778\,E_5$$

$$E_4 = \ \ 20.8717176 - 2.9019814\,E_5$$

As in the calculations with four terms, the shape of the profile appears to have little effect on these values. The following results for thc same profiles considered before were obtained by evaluating the integrals by Simpson's rule.

k	μ	a_5	E_1	E_2
0	90°	1.96551	$-6.45420 + 0.23880\,E_5$	$32.79849 - 1.28671\,E_5$
0.2	arc cos 0.2	1.97874	$-6.24440 + 0.20932\,E_5$	$31.87536 - 1.28981\,E_5$
0.4	arc cos 0.2	2.01760	$-6.10246 + 0.20939\,E_5$	$31.26772 - 1.28798\,E_5$
0.2	30°	2.03068	$-6.39570 + 0.24578\,E_5$	$32.54108 - 1.44810\,E_5$

k	μ	E_3	E_4
0	90^0	$-46.21605+3.08058\,E_5$	$20.87172-2.90198\,E_5$
0.2	arc cos 0.2	$-44.91528+2.90079\,E_5$	$20.28432-2.82079\,E_5$
0.4	arc cos 0.2	$-44.05906+2.89821\,E_5$	$19.89764-2.82014\,E_5$
0.2	30^0	$-45.85334+3.12384\,E_5$	$20.70796-2.92132\,E_5$

The velocity distribution for this case is given by the formula

$$\frac{V'_{c_5}}{2\,u\sin\alpha}=\frac{E_1}{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}+\frac{E_2}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2}+\frac{E_3}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^3}+\frac{E_4}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^4}+\frac{E_5}{\left(1+\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^5}$$

In the following calculations we have assumed that E_1, E_2, E_3 and E_4 expressed in terms of E_5, do not change with the shape of the profile and are equal to the values given on page 115 for the rectilinear profile. We have calculated $\frac{V'_{c_5}}{2\,u\,\sin\alpha}$ for $k=0$, $\mu=90^0$ for several different values of E_5, the results being shown in the table which follows and also in Figure 1. Although none of these curves are in very good agreement with the

Velocity Distributions with Five Terms

$V'_{c_5}/2\,u\sin\alpha$

$\pm\vartheta$	$E_5=-100$	$E_5=-150$	$E_5=331$
0	0.50000	0.50000	0.50000
10	0.50296	0.50338	0.49924
20	0.51043	0,51163	0.50006
30	0.52299	0.52549	0.50134
40	0,53965	0.54366	0.50436
50	0.55948	0.56477	0 51368
60	0.58116	0.58817	0.52935
70	0.60337	0.60906	0.55430
80	0.62362	0.62719	0.59297
90	0.64055	0.64001	0,64515
100	0.65213	0.64531	0.71094
110	0.65732	0.64242	0.78572
120	0.65679	0.63344	0.85802
130	0.65458	0,62358	0,90625
140	0.66007	0.63252	0.89702
150	0.68966	0.67749	0.79453
160	0.76452	0.78456	0.59177
170	0.89259	0 94537	0.43754
180	1.00000	1.00000	1.00000

one for original discontinuous potential, these results demonstrate the possibility of obtaining a satisfactory agreement by this method. If necessary still more terms could be added to the complementary function and a better agreement might possibly be obtained by an

application of the method of least squares, but we shall not carry this work any further at this time.

We have now shown that it is possible to find a new discontinuous potential whose derivative is of the form (5) which will give practically the same velocity distribution as that obtained with the original function of only one term, the circulation remaining the same, and the drag being always positive for the usual range of angles of attack. Now calculations made with other functions[9]) giving the same velocity distribution and circulation as

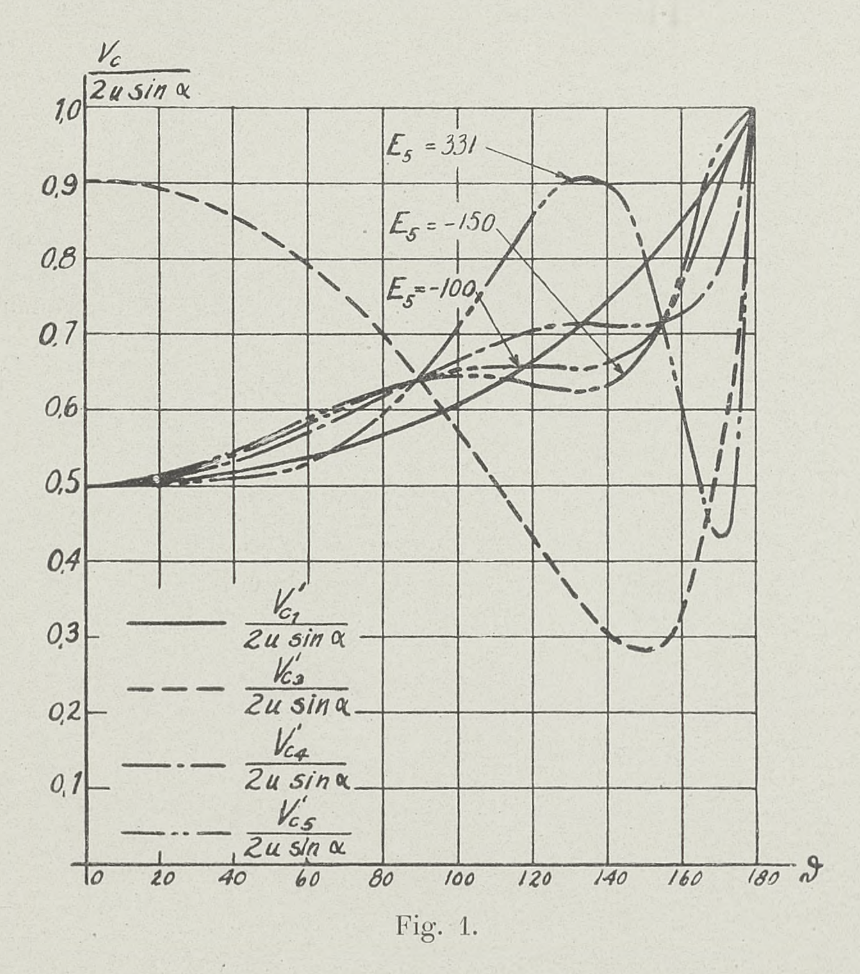


Fig. 1.

the original function, have shown that under these conditions the values of the coefficient in the expression for the lift and of K_3 in the drag are practically unchanged. Consequently the calculations we have just made show that the original discontinuous potential may be considered as an approximation to a similar function of five or more terms and the former may be used for the determination of the characteristics of a wing profile provided that in the case of asymmetric sections, we put K_2 equal to zero in the expression for the drag. This expression then becomes

$$P_{x_1} = \sigma u^2 a K_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (22)$$

Ann Arbor, Michigan (U. S. A.)
June 9, 1931.

---

[9]) S. Neumark: loc. cit.
M. J. Thompson: loc. cit., pp. 38—44.

Prace Instytutu Aerodynamicznego w Warszawie

prowadzone pod kierunkiem

Prof. C. WITOSZYŃSKIEGO

Zeszyt I: (w języku francuskim) O pewnej metodzie tworzenia profilów lotniczych—J. Bonder. Zastosowanie różnych postaci potencjału do obliczenia sił działających na profile lotnicze — S. Neumark. Z 18 rysunkami w tekście. Str. 84. 1927. Zł. 9.—

Zeszyt II: (w języku francuskim) O wielopłacie w układzie tandem—J. Bonder i P. Szymański. Przepływ płaski cieczy przez palisadę odcinków prostolinjowych—P. Szymański. Przyczynek do teorji dwupłata—J. Bonder i P. Szymański. Z 22 rysunkami w tekście. Str. 72. 1928. Zł. 9.—

Zeszyt III: (w języku francuskim) Profile lotnicze o stałym środku parcia—S. Neumark. Uwagi dotyczące pomiarów śmigła pociągowego ustawionego skośnie w prądzie powietrza—J. Bonder. Z 23 rysunkami w tekście. Str. 79. 1930. Zł. 9.—

Zeszyt IV: (w języku angielskim) Wpływ lotki podłużnej na charakterystyki aerodynamiczne płata nośnego—M. J. Thompson. Tunel Instytutu Aerodynamicznego w Warszawie. Pewne uwagi dotyczące badań stateczności podłużnej — M. J. Thompson. Z 43 rysunkami w tekście. Str. 96. 1930. Zł. 9.—

Zeszyt V: (w języku polskim i francuskim) Prace doświadczalne wykonane w czasie od 1927 — 1931. C. Bieniek. Z 32 rysunkami w tekście. Str. 272. 1932. Zł. 50.—

Travaux de l'Institut Aérodynamique de Varsovie

exécutés sous la direction

du prof. C. WITOSZYŃSKI

Fascicule I: Sur la construction des profils d'aviation — J. Bonder. Sur les formes diverses du potentiel servant à calculer les forces qui agissent sur les profils d'aviation—S. Neumark. 18 figures. 84 pages. 1927. Zł. 9.—

Fascicule II: Sur le multiplan en tandem—J. Bonder et P. Szymański. Écoulement plan du fluide à travers une palissade de segments rectilignes—P. Szymański. Contribution à la théorie du biplan—J. Bonder et P. Szymański. 22 figures. 72 pages. 1928. Zł. 9.—

Fascicule III: Les profils d'aviation à centre de poussée fixe—S. Neumark. Quelques remarques concernant les essais de l'hélice propulsive installée obliquement dans un courant d'air—J. Bonder. 23 figures. 79 pages. 1930. Zł. 9.—

Fascicule IV: The effect of a hinged flap on the aerodynamic characteristics of an airfoil—M. J. Thompson. The wind tunnel of the Aerodynamic Institute of Warsaw. Some notes on the study of longitudinal stability—M. J. Thomson. 43 figures. 96 pages. 1930. Zł. 9.—

Fascicule V: Travaux expérimentaux exécutés pendant les années 1927 1931—C. Bieniek. 32 figures. 272 pages. 1932. Zł. 50.—